

# Valutazione della resistenza del calcestruzzo combinando i risultati di prove dirette e non distruttive

Renato Giannini

Lorena Sguerri

*Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Strutture*

## SOMMARIO

Le prove distruttive su carote estratte dalla struttura forniscono i dati più attendibili per la stima delle caratteristiche meccaniche del calcestruzzo esistente, ma queste prove, essendo costose ed invasive, andrebbero limitate in numero ed eseguite secondo un piano razionalmente progettato.

I risultati delle prove distruttive possono essere affiancati ed arricchiti da misure indirette della resistenza, usando uno o più metodi non distruttivi. Queste prove possono fornire importanti informazioni preliminari, circa l'omogeneità delle caratteristiche del calcestruzzo sotto indagine e quindi suggerire il numero e la localizzazione dei successivi prelievi di carote. Ma, oltre ad una indagine preventiva, le prove non distruttive possono essere utilizzate per ampliare la base dati con cui si stima la resistenza del materiale in esame. A questo fine è necessario disporre di una legge di correlazione che fornisca, in funzione della grandezza misurata, una stima (probabilistica) della resistenza. In molti casi tali leggi sono difficilmente generalizzabili, e quindi devono essere tarate di volta in volta sulla base di un certo numero di coppie di dati (valore della grandezza indiretta e valore della resistenza).

L'utilizzo di tecniche di sperimentazione diverse (distruttive e non distruttive) porta quindi a disporre di informazioni della stessa grandezza dotate di disuguale attendibilità. In questo lavoro viene presentata una tecnica, basata sull'inferenza bayesiana, che consente di mescolare razionalmente questi due tipi di dati; come risultato si ottiene la curva di distribuzione della resistenza del calcestruzzo, mediante la quale si possono determinare alcuni valori significativi, normalmente usati nei calcoli, come ad esempio il valore mediano e il valore caratteristico della resistenza.

La metodologia è stata sviluppata con riferimento alle misure di velocità degli ultrasuoni, uno dei più popolari metodi non distruttivi impiegati per il calcestruzzo, ma può essere usata anche per altri tipi di test. I risultati sono stati poi applicati ad alcuni edifici esistenti, di cui erano disponibili i dati sperimentali.

## **Introduzione**

La valutazione della resistenza di una struttura esistente richiede che preliminarmente siano state valutate le caratteristiche meccaniche dei materiali. Per il calcestruzzo questo aspetto è particolarmente delicato e rilevante, a causa della elevata variabilità della sua resistenza, che è sensibile alla composizione, alle condizioni ambientali, all'azione di sostanze aggressive, ecc.

Un altro problema che si incontra nel processo di valutazione, è quello di stabilire quali parti della struttura si possano ritenere, dal punto di vista del materiale, omogenee. Quando si eseguono misure in punti diversi, e si usano i risultati per costruire una statistica della grandezza misurata, implicitamente si ammette che il campo stocastico che la descrive sia omogeneo. Tale ipotesi può ritenersi ragionevole se durante la costruzione non sono avvenuti eventi che hanno portato ad un cambiamento sistematico della qualità del calcestruzzo. È dunque importante saper riconoscere le zone della costruzione all'interno delle quali è lecito assumere che il materiale abbia caratteristiche omogenee.

Lo strumento preferenziale per la misura della resistenza (e di altre proprietà meccaniche, come il modulo elastico) del calcestruzzo è la prova distruttiva, che, nel caso delle costruzioni esistenti, si esegue su carote prelevate dalla struttura. Anche se questa misura può essere alterata da diversi fattori, ad esempio dal disturbo arrecato dall'operazione di carotaggio, il valore rilevato in questo modo è sicuramente il più attendibile che si possa ottenere, e nel seguito sarà ritenuto il valore reale della resistenza del materiale in quel punto.

Le misure dirette sono invasive, oltre che costose, e vanno quindi limitate in numero, specialmente quando le indagini riguardano costruzioni in esercizio. La misura può quindi essere integrata da prove indirette, non distruttive. Queste misure disturbano meno la struttura e, generalmente, sono meno costose delle precedenti, perciò possono essere eseguite in maggior numero ed interessare una più vasta estensione della struttura; per contro, per utilizzarne i risultati, occorre disporre di un modello matematico che ponga in relazione la grandezza misurata con quella che si desidera stimare. I modelli usati in pratica contengono sempre dei termini aleatori, perché sono modelli semplificati in cui compaiono solo alcune (spesso solo una) tra le grandezze che influiscono sul valore di ciò che si intende stimare. La stima è quindi sempre affetta da un errore casuale, più o meno grande, secondo il metodo di misura utilizzato. È opinione condivisa che queste misure non possano sostituire, ma soltanto affiancare, quelle dirette, che servono anche per tarare la legge di correlazione tra le due grandezze.

Il progettista dispone quindi di dati con diversa attendibilità, alcuni forniti dalle prove dirette, altri, presumibilmente più numerosi, ottenuti dalle prove indirette. Si pone il problema di mescolare queste informazioni per giungere in modo razionale ad una valutazione globale della resistenza.

## **Descrizione sintetica della procedura**

In questo paragrafo viene delineato il procedimento proposto per giungere ad una stima razionale della resistenza del calcestruzzo di una costruzione esistente, utilizzando i risultati di misure dirette ed indirette. Nel seguito, per le prove non distruttive, si farà riferimento al metodo delle velocità degli ultrasuoni; tuttavia la procedura proposta può applicarsi, senza rilevanti modifiche, a qualunque altro metodo di misura indiretta.

La procedura si articola nei seguenti passi:

1. *Determinazione delle zone omogenee.* Lo scopo di questa fase è determinare quali parti di una costruzione (eventualmente l'intera), si possano ritenere realizzate con un materiale avente caratteristiche omogenee. Come operazione preliminare occorre suddividere la costruzione in zone che si possano ritenere a priori internamente omogenee. Ad esempio, in un edificio di non grandi dimensioni, ciascun piano può ritenersi omogeneo, in quanto il getto sarà avvenuto in un tempo limitato, durante il quale si presume che non si siano verificati cambiamenti rilevanti. Si vuole quindi verificare se zone diverse possano ritenersi tra loro omogenee.

Questa procedura prevede che la determinazione dell'omogeneità sia basata sui risultati delle misure non distruttive, l'omogeneità pertanto è effettivamente stabilita per la grandezza misurata (p.es. la velocità degli ultrasuoni) e non per quella di interesse (la resistenza del materiale). Si deve quindi presumere che l'omogeneità rispetto ad una grandezza implichi anche quella dell'altra.

Dopo aver suddiviso la costruzione in  $n_0$  zone, ritenute omogenee a priori, in ciascuna si esegue un numero adeguato (15-20) di misure non distruttive. Mediante il criterio che sarà illustrato nel seguito, è possibile decidere se due zone si debbano ritenere o no tra loro omogenee. A conclusione di questa fase la costruzione risulterà suddivisa in un certo numero di parti (al limite una sola) che si ritiene siano state costruite con un calcestruzzo avente caratteristiche omogenee.

2. *Determinazione della distribuzione a priori della resistenza sulla base delle misure indirette.* In ciascuna parte ritenuta omogenea si determina la distribuzione della resistenza del calcestruzzo, basandosi sui risultati delle prove non distruttive. A questo scopo è necessario disporre di una legge di correlazione tra la grandezza misurata (p.es. la velocità degli ultrasuoni) e la resistenza. Come è noto queste leggi non sono generalizzabili; per avere una legge attendibile e non affetta da errore sistematico è quindi necessario tararla caso per caso.

In ciascuna zona classificata omogenea si prelevano un certo numero di carote (almeno 5) delle quali si misura la resistenza. I prelievi vanno eseguiti in corrispondenza di alcuni tra i punti dove in precedenza sono state eseguite le misure non distruttive. Sulla base delle coppie dei valori misurati si costruisce quindi la legge di regressione e con questa, utilizzando *le restanti* misure non distruttive, si determina una funzione di distribuzione della media e della varianza della resistenza del calcestruzzo.

3. *Costruzione della distribuzione finale mediante aggiornamento bayesiano.* La distribuzione costruita nel punto precedente non utilizza i dati più significativi, che sono quelli ottenuti mediante le misure dirette sulle carote. Questa informazione viene ora inserita nel processo aggiornando la distribuzione determinata nel punto precedente con i valori delle resistenze effettivamente misurati. In questo modo si tiene conto, pesandole con la relativa attendibilità, sia delle misure dirette sia di quelle indirette.

### **Distribuzioni dei parametri statistici mediante inferenza bayesiana**

La distribuzione lognormale è comunemente utilizzata per formulare il modello probabilistico delle principali caratteristiche meccaniche del calcestruzzo (resistenza, modulo elastico, ecc.) [1]. Poiché la velocità di propagazione delle onde dipende essenzialmente dalla radice quadrata del modulo elastico, anche per essa si potrà utilizzare la medesima distribuzione. I logaritmi di queste variabili sono quindi distribuiti secondo la legge di Gauss. Poiché gli sviluppi analitici risultano notevolmente semplificati se le variabili sono gaussiane, nel seguito si opererà direttamente *sui logaritmi* di queste grandezze.

Se  $X$  è una v.a. gaussiana, con media  $\mu$  e varianza  $\sigma$ , la sua funzione di probabilità è

$$p(x | \mu, \sigma) = \exp\left[-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2\right] / \sqrt{2\pi}\sigma \quad (1)$$

Se i parametri  $\mu$  e  $\sigma$  fossero noti, la (1) descriverebbe in modo completo la variabile  $X$ . Generalmente però queste grandezze sono incognite e devono essere stimate sulla base di un campione di dati; se il campione è grande, la media aritmetica  $\bar{x}$  e lo scarto quadratico medio  $s$ , forniscono una valida stima per  $\mu$  e  $\sigma$ , ma, nel caso di piccoli campioni, media e varianza sono anch'esse grandezze aleatorie, la cui dispersione diminuisce al crescere delle dimensioni  $n$  del campione.

La funzione di probabilità di media e deviazione standard si ottiene facilmente utilizzando l'inferenza bayesiana [2]; se  $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}$  è un vettore di osservazioni indipendenti della v.a. gaussiana  $X$ , tale funzione di probabilità è:

$$p(\mu, \sigma | \mathbf{x}) = \frac{(n-1)^{(n-1)/2} \sqrt{ns}^{n-1}}{2^{(n-2)/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma^{-(n+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(n-1)s^2 + n(\mu - \bar{x})^2\right]\right\} \quad (2)$$

dove

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n x_j / n \quad s^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 / (n-1) \quad (3)$$

sono la media statistica e lo scarto quadratico medio del campione.

Moltiplicando la (1) per la (2), si ottiene la distribuzione congiunta di  $X$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ . Integrando quest'ultima su  $\mu$  e  $\sigma$ , rispettivamente tra  $(-\infty, \infty)$  e  $(0, \infty)$ , si ottiene la distribuzione marginale di  $X$ :

$$p(x | \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{n}{\pi(n^2 - 1)}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2 - 1/2)} \frac{1}{s} \left[1 + \frac{n(x - \bar{x})^2}{(n-1)(n+1)s^2}\right]^{-n/2} \quad (4)$$

Ponendo  $t = \sqrt{n}(x - \bar{x}) / \sqrt{n+1}s$ , la (4) è la funzione di probabilità di Student ad  $n-1$  gdl. Quindi  $E[X | \mathbf{x}] = \bar{x}$  e  $\text{Var}[X | \mathbf{x}] = s^2(n^2 - 1) / [n(n-3)]$ . Queste relazioni mostrano che il valor medio di  $X$  (condizionato ai dati) coincide con la media statistica di questi ultimi, mentre solo per  $n$  grande si può assumere che la varianza coincida con lo scarto quadratico medio; per piccoli campioni la varianza è sensibilmente più grande e, per  $n < 4$ , diviene infinita.

### Test di omogeneità di diverse zone della costruzione

Divisa la costruzione in zone ritenute omogenee a priori, si assume che in ciascuna sia stato eseguito un gruppo di  $n_i$  misure indirette i cui logaritmi sono raccolti nel vettore  $\mathbf{v}_i$ . Date due differenti zone,  $i$  e  $k$ , si deve decidere se queste si possano ritenere o no tra loro omogenee. Il test adottato riguarda solo il valor medio: si assume che le due zone sono omogenee se  $\mu_{v_i} = \mu_{v_k}$ , non omogenee nel caso contrario.

Disponendo di due campioni di osservazioni  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , considerati come realizzazioni di due v.a.  $V_1$  e  $V_2$ , si vuole verificare l'ipotesi che  $V_1$  e  $V_2$  abbiano la stessa media. Per semplificare il problema si assume che la varianza delle due v.a., anche se incognita, sia la stessa. Si osservi che la deviazione standard del logaritmo approssima il coefficiente di variazione della variabile originale; l'ipotesi che le variabili abbiano la stessa deviazione standard so-

stanzialmente equivale ad assumere l'uguaglianza dei coefficienti di variazione delle variabili originali, e questa ipotesi appare per lo meno plausibile.

Per le ipotesi fatte la variabile

$$t = [(\mu_{v_1} - \mu_{v_2}) - (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)] / S \quad (5)$$

con

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)s_{v_1}^2 + (n_2 - 1)s_{v_2}^2}{n_1 + n_2 - 2} \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \quad (6)$$

segue la distribuzione di Student con  $n_1 + n_2 - 2$  gdl [2], dove  $n_1$  ed  $n_2$  sono le dimensioni dei campioni  $v_1$  e  $v_2$ .

Fissato un valore  $t_0$ , l'ipotesi di omogeneità è rifiutata se  $|\bar{v}_1 - \bar{v}_2| / S > t_0$ . Se l'ipotesi è vera, quindi  $\mu_{v_1} - \mu_{v_2} = 0$ , la probabilità che di rifiutare erroneamente un'ipotesi vera è:

$$\Pr[|\bar{v}_1 - \bar{v}_2| / S > t_0] = \alpha = 2F_t(-t_0, \nu) \quad (7)$$

dove  $F_t(t, \nu)$  indica la funzione di distribuzione cumulata di Student con  $\nu = n_1 + n_2 - 2$  gdl. Riducendo  $\alpha$  si riduce ovviamente la probabilità di rifiutare l'ipotesi di omogeneità se questa è vera (errore tipo I), ma contemporaneamente aumenta quella dell'errore opposto (accettare l'ipotesi quando è falsa - errore tipo II). La scelta di  $\alpha$  dipende anche dall'importanza che si dà ai due tipi di errore; nel nostro caso è tutto sommato preferibile ritenere disomogenee due zone che non lo sono, piuttosto che commettere l'errore opposto; per questo è opportuno prendere per  $\alpha$  un valore non troppo piccolo;  $\alpha = 0.20$  potrebbe essere un accettabile compromesso.

### Calibrazione della legge di regressione

L'utilizzo di misure indirette per stimare la resistenza del calcestruzzo, richiede una legge di regressione che permetta di determinare la resistenza  $r$  in funzione della grandezza misurata  $v$  (la velocità degli ultrasuoni). Come spiegato nell'introduzione, questa relazione non è deterministica e quindi si può porre nella forma  $r = f(v, \theta) + \varepsilon$ , dove  $\theta$  è un vettore di parametri che definiscono la funzione  $f$  ed  $\varepsilon$  è una v.a. a media nulla, che tiene conto della natura non deterministica della relazione.

Quando i parametri  $\theta$  sono stimati sulla base di un campione di dimensioni finite di coppie  $(r_i, v_i)$  anche  $\theta$  è incerto, ed  $r$  è aleatorio sia per la natura non deterministica della relazione, sia per l'incertezza sulla stima dei parametri  $\theta$ . Si deve notare che mentre la prima è intrinseca al metodo, la seconda dipende dalla dimensione del campione e tende a zero quando questa tende all'infinito. Un caso particolare si ha se la relazione è lineare: in questo caso  $\theta$  ha solo due elementi, che saranno indicati con  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$r = \alpha + \beta v + \varepsilon \quad (8)$$

Se la legge di regressione avesse validità generale, sarebbe possibile stimarne i parametri mediante un campione sufficientemente numeroso, in modo da renderli praticamente deterministici. In realtà, particolarmente per quanto riguarda la relazione tra velocità ultrasonica e resistenza del calcestruzzo, una tale relazione universale non esiste. Per disporre di un modello attendibile e non affetto da errori sistematici, è dunque necessario stimarne i parametri con dati specifici del calcestruzzo che si sta valutando. Adottando la relazione

(8) occorre stimare, sulla base di un piccolo campione di misure distruttive e dei corrispondenti risultati delle misure indirette, oltre alla varianza di  $\varepsilon$ , i due parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .

In precedenti lavori [3-4] è stato mostrato che, quando la regressione è basata su piccoli campioni, è preferibile utilizzare una legge in cui il coefficiente angolare  $\beta$  è ritenuto deterministico, adottando un valore calcolato sulla base di un campione ampio e non specifico dei dati. Infatti empiricamente si è visto che, per calcestruzzi diversi, si trovano rette di regressione approssimativamente parallele, ma anche notevolmente traslate (Figura 1). Qui è stata adottata una legge di regressione in cui il parametro  $\beta$  è considerato deterministico e noto a priori, mentre  $\alpha$  viene stimato sulla base dei dati locali. Se  $\beta$  è noto, si può definire la nuova variabile

$$z = r - \beta v = \alpha + \varepsilon \quad (9)$$

Partendo da un campione di  $n_c$  coppie di dati  $(r_i, v_i)$ , si determina la statistica di  $z$ :

$$\bar{z} = \bar{r}_c - \beta \bar{v}_c \quad s_z^2 = s_{rc}^2 + \beta^2 s_{vc}^2 - 2\beta s_{rv} \quad (10)$$

dove

$$\bar{r}_c = \sum_{i=1}^{n_c} r_i / n_c \quad \bar{v}_c = \sum_{i=1}^{n_c} v_i / n_c \quad (11)$$

$$s_{rc}^2 = \sum_{i=1}^{n_c} (r_i - \bar{r}_c)^2 / (n_c - 1); \quad s_{vc}^2 = \sum_{i=1}^{n_c} (v_i - \bar{v}_c)^2 / (n_c - 1); \quad s_{rv} = \sum_{i=1}^{n_c} (v_i - \bar{v}_c)(r_i - \bar{r}_c) / (n_c - 1)$$

Applicando la (2) alla v.a.  $z$ , si deduce facilmente la funzione di probabilità congiunta di  $\mu_z$  e  $\sigma_z$ :

$$p(\mu_z, \sigma_z) = \frac{(n_c - 1)^{(n_c - 1)/2} \sqrt{n_c} s_z^{n-1}}{2^{(n_c - 2)/2} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n_c - 1}{2})} \sigma_z^{-(n_c + 1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_z^2} [(n_c - 1)s_z^2 + n_c(\mu_z - \bar{z})^2]\right\} \quad (12)$$

### Distribuzione della velocità

Solo una parte delle  $n$  misure indirette saranno state impiegate per calibrare la legge di regressione  $v \rightarrow r$ . La parte restante forma un campione di  $n_v = n - n_c$  che può essere impiegato per determinare la distribuzione di  $v$ . Applicando la (4) si ottiene immediatamente:

$$p(v) = \frac{1}{s_v} \sqrt{\frac{n_v}{(n_v^2 - 1)\pi}} \frac{\Gamma(n_v/2)}{\Gamma(n_v/2 - 1/2)} \left[1 + \frac{n_v(v - \bar{v})^2}{(n_v - 1)(n_v + 1)s_v^2}\right]^{-n_v/2} \quad (13)$$

in cui

$$\bar{v} = \sum_{i=n_c+1}^n v_i / n_v \quad s_v^2 = \sum_{i=n_c+1}^n (v_i - \bar{v})^2 / (n_v - 1)$$

La distribuzione di  $v$  è quindi Student ad  $n_v - 1$  gdl con media  $\bar{v}$  e varianza  $(n_v^2 - 1)s_v^2 / n_v(n_v - 3)$ .

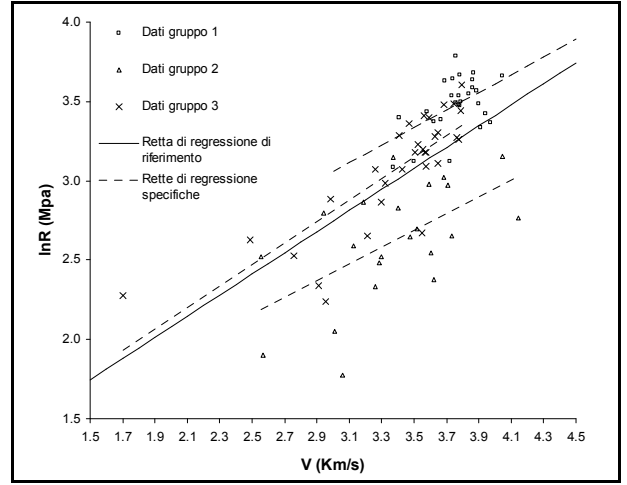


Figura 1 – Rette di regressione

## Distribuzione a priori della resistenza media

La (12) fornisce la funzione di probabilità congiunta di media e varianza della v.a.  $z$ . Fissato il valore di  $v$ ,  $z$  e  $r$  differiscono solo per il termine costante  $\beta v$ , quindi la funzione di probabilità della media e della varianza di  $r$ , condizionata a  $v$ , si ottiene dalla (12) ponendo  $\mu_z = \mu_r - \beta v$ :

$$p(\mu_r, \sigma_r | v) = \frac{(n_c - 1)^{(n_c - 1)/2} \sqrt{n_c} S_z^{n-1}}{2^{(n_c - 2)/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n_c - 1}{2}\right)} \sigma_r^{-(n_c + 1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_r^2} \left[(n_c - 1)s_z^2 + n_c(\mu_r - \beta v - \bar{z})^2\right]\right\} \quad (14)$$

Per il teorema della probabilità totale, la distribuzione congiunta di  $\mu_r$  e  $\sigma_r$  si calcola moltiplicando la (14) per la funzione di probabilità di  $v$  (13) ed integrando tra  $-\infty$  e  $\infty$ :

$$p(\mu_r, \sigma_r) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu_r, \sigma_r | v) p(v) dv \quad (15)$$

Per semplificare il calcolo analitico di questo integrale è conveniente approssimare la distribuzione di Student (13) con la distribuzione di Gauss. Come è noto, al crescere del numero dei gradi di libertà, la distribuzione di Student tende a quella normale; quindi questa approssimazione è accettabile se  $n_v$  non è troppo piccolo; in pratica già per  $n_v \sim 15$  l'accordo tra le due è piuttosto buono. Assumendo questa approssimazione, alla (13) si sostituisce la distribuzione di Gauss con varianza  $S_v^2 = (n_v^2 - 1)s_v^2 / n_v(n_v - 3)$ . Sostituendo questa funzione e la (14) nella (15) e svolgendo l'integrale si ottiene

$$p(\mu_r, \sigma_r) = \frac{(n_c - 1)^{(n_c - 1)/2} \sqrt{n_c} S_z^{n-1}}{2^{(n_c - 2)/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n_c - 1}{2}\right)} \frac{\sigma_r^{-n_c}}{\sqrt{n_c S_v^2 \beta^2 + \sigma_r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(n_c - 1)s_z^2}{\sigma_r^2} + \frac{n_c [\mu_r - \bar{r}_c - \beta(\bar{v} - \bar{v}_c)]^2}{n_c S_v^2 \beta^2 + \sigma_r^2} \right]\right\} \quad (16)$$

## Aggiornamento della distribuzione

La funzione di probabilità (16) è stata costruita utilizzando solo le misure non distruttive; infatti i risultati delle prove distruttive sono stati usati per formulare la legge di correlazione, non per valutare direttamente i parametri della distribuzione di  $r$ . Ovviamente questo non è razionale, poiché i dati delle prove distruttive sono quelli più attendibili.

Se si assume la (16) come una distribuzione a priori, il teorema di Bayes ci indica come aggiornarne i parametri in base ai risultati delle prove distruttive che, dati  $\mu_r$  e  $\sigma_r$ , sono gaussiani e quindi

$$p(\mathbf{r}_c | \mu_r, \sigma_r) \propto \sigma_r^{-n_c} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_r^2} \left[(n_c - 1)s_{rc}^2 + n_c(\mu_r - \bar{r}_c)^2\right]\right\} \quad (17)$$

Usando la (17) come funzione di verosimiglianza e la (16) come distribuzione a priori, appunto, si ha

$$p(\mu_r, \sigma_r | \mathbf{r}_c) = p(\mathbf{r}_c | \mu_r, \sigma_r) p(\mu_r, \sigma_r) \propto \frac{\sigma_r^{-2n_c}}{\sqrt{n_c S_i^2 + \sigma_r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(n_c - 1)S_r^2}{\sigma_r^2} + n_c \left( \frac{[\mu_r - \bar{r}_c - \beta \Delta \bar{v}]^2}{n_c S_i^2 + \sigma_r^2} + \frac{(\mu_r - \bar{r}_c)^2}{\sigma_r^2} \right) \right]\right\} \quad (18)$$

dove  $S_r^2 = (s_z^2 + s_{rc}^2)$   $\Delta \bar{v} = \bar{v} - \bar{v}_c$   $S_i^2 = S_v^2 \beta^2$ .

La distribuzione congiunta di  $r$ ,  $\mu_r$  e  $\sigma_r$  si ottiene quindi moltiplicando la (18) per la distribuzione di  $r$  condizionata a  $\mu_r$  e  $\sigma_r$ , ossia:

$$p(r, \mu_r, \sigma_r) = p(r | \mu_r, \sigma_r) p(\mu_r, \sigma_r) \propto \frac{\sigma_r^{-2n_c-1}}{\sqrt{n_c S_i^2 + \sigma_r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(n_c - 1) S_r^2}{\sigma_r^2} + \frac{n_c (\mu_r - \bar{r}_c - \beta \Delta \bar{v})^2}{n_c S_i^2 + \sigma_r^2} + \frac{n_c (\mu_r - \bar{r}_c)^2}{\sigma_r^2} + \frac{(r - \mu_r)^2}{\sigma_r^2} \right] \right\} \quad (19)$$

Per ottenere la densità marginale di  $r$  si deve quindi integrare la (19) rispetto a  $\mu_r$  e  $\sigma_r$ . Ai fini delle applicazioni, tuttavia, è più utile disporre della funzione di distribuzione, mediante la quale, ad esempio, si determinano valori frattili di  $r$  (valore mediano o valore caratteristico) che possono essere utilizzati in un ordinario contesto semiprobabilistico. Poiché l'integrale della (19) rispetto a  $\sigma_r$  non è risolubile in forma chiusa, è conveniente integrare questa equazione prima rispetto ad  $r$ . Si ottiene così:

$$F_r(r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu_r, r, \sigma_r) d\mu_r d\sigma_r dr = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{r_0} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu_r, r, \sigma_r) d\mu_r dr d\sigma_r = C \int_0^{\infty} \frac{\sigma_r^{-2n_c+1}}{\sqrt{n_c (n_c S_i^2 + 2\sigma_r^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(n_c - 1) S_r^2}{\sigma_r^2} + \frac{n_c \beta^2 \Delta \bar{v}^2}{2\sigma_r^2 + n_c S_i^2} \right] \right\} \Phi \left( \frac{r_0 - \bar{r}_c - \frac{\sigma_r^2 \beta \Delta \bar{v}}{n_c S_i^2 + 2\sigma_r^2}}{\sigma_r \sqrt{\frac{\sigma_r^2 (2n_c + 1) + (n_c + 1) n_c S_i^2}{n_c (n_c S_i^2 + 2\sigma_r^2)}}} \right) d\sigma_r \quad (20)$$

dove  $\Phi()$  indica la funzione di distribuzione cumulata di Gauss e  $C$  è una costante di normalizzazione che si determina con la condizione che  $F_r(\infty) = 1$ .

L'integrale nella (20) si può calcolare numericamente senza particolari difficoltà. In base ai risultati è quindi possibile determinare quei valori di  $r$  a cui corrispondono valori fissati di probabilità, p.es. il valore mediano ( $F_r(r_m) = 0.5$ ) o caratteristico ( $F_r(r_k) = 0.05$ ). Ai fini pratici, per evitare il calcolo esplicito degli integrali, questi valori si possono tabellare in funzione dei parametri da cui dipendono. Nella (20) compaiono esplicitamente sette variabili, che tuttavia, introducendo le nuove grandezze:  $\lambda = S_r/S_i$ ,  $\gamma = \beta \Delta \bar{v}/S_i$ ,  $\xi = (r_0 - \bar{r}_c)/S_i$  si riducono a sole quattro ( $n_c$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  e  $\xi$ ). Un esempio di tali tabelle per la determinazione del valore caratteristico di  $r$  è riportato nella Tabella 1, relativamente al caso  $n_c = 7$ .

$\lambda$	$\gamma$	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
1.00		-1.475	-1.455	-1.435	-1.416	-1.397	-1.378	-1.359	-1.340	-1.321	-1.303	-1.285
1.25		-1.814	-1.778	-1.743	-1.709	-1.679	-1.663	-1.648	-1.633	-1.618	-1.603	-1.588
1.50		-2.145	-2.117	-2.09	-2.063	-2.036	-2.010	-1.984	-1.958	-1.933	-1.908	-1.884
1.75		-2.520	-2.480	-2.439	-2.400	-2.360	-2.321	-2.282	-2.244	-2.206	-2.168	-2.143
2.00		-2.873	-2.818	-2.763	-2.709	-2.655	-2.613	-2.580	-2.548	-2.516	-2.486	-2.456
2.25		-3.205	-3.135	-3.079	-3.034	-2.989	-2.945	-2.902	-2.859	-2.817	-2.775	-2.735
2.50		-3.537	-3.480	-3.422	-3.365	-3.309	-3.252	-3.197	-3.142	-3.093	-3.058	-3.023
2.75		-3.885	-3.815	-3.745	-3.675	-3.606	-3.549	-3.502	-3.455	-3.409	-3.365	-3.321
3.00		-4.214	-4.131	-4.050	-3.990	-3.931	-3.873	-3.815	-3.759	-3.703	-3.648	-3.594
3.25		-4.526	-4.455	-4.385	-4.316	-4.246	-4.177	-4.109	-4.044	-3.996	-3.948	-3.902
3.50		-4.866	-4.785	-4.704	-4.624	-4.543	-4.479	-4.42	-4.362	-4.304	-4.248	-4.194
Valori di $\xi_k = (r_k - \bar{r})/S_i$ in funzione di $\lambda$ e $\gamma$ per per $n_c = 7$ – frattile inferiore del 5%												

Tabella 1

### Esempio

L'intera procedura è stata utilizzata per analizzare i dati relativi ad un gruppo di edifici in cemento armato realizzato circa venti anni fa, composto da otto corpi di fabbrica. Sulle strutture di ogni fabbricato furono eseguite 9 misure ultrasoniche e prelevate da una a tre



carote, per un totale di 72 valori della velocità, 21 dei quali associati ad altrettanti valori della resistenza del calcestruzzo, misurati mediante prove a rottura dei campioni cilindrici. Ogni fabbricato è stato considerato a priori come una zona omogenea. Nella Tabella 2 sono riportati i valori medi,  $\bar{v}$ , e le deviazioni standard,  $s_v$ , relativi ai logaritmi delle velocità, espresse in Km/s, per ogni fabbricato. Il test di omogeneità ( $\alpha = 0.2$ ) è stato eseguito per

Fabbricato	$\bar{v}$	$s_v$	Gruppo omogeneo
Fabbr. 1	1,278	0,034	G2
Fabbr. 2	1,297	0,035	G2
Fabbr. 3	1,332	0,031	G1
Fabbr. 4	1,331	0,029	G1
Fabbr. 5	1,331	0,043	G1
Fabbr. 6	1,351	0,029	G3
Fabbr. 7	1,286	0,053	G2
Fabbr. 8	1,355	0,012	G3

Tabella 2

6 e 8 (gruppo G3). A seguito del test di omogeneità, quindi, gli 8 corpi risultano riuniti in 3 gruppi omogenei, su ciascuno dei quali è possibile applicare la procedura di valutazione della resistenza del calcestruzzo.

Nella Tabella 3 sono riportati, per i tre gruppi omogenei, il numero complessivo di prove ultrasoniche ( $n$ ), il numero di carote ( $n_c$ ) assieme al valor medio ed alla deviazione standard ( $\bar{r}_c, s_c$ ) dei logaritmi delle loro resistenze espresse in MPa, le analoghe grandezze relative alle velocità misurate negli stessi punti dei prelievi ( $\bar{v}_c, s_{vc}$ ) ed in corrispondenza delle rimanenti stazioni di prova ( $\bar{v}, s_v$ ), nonché il coefficiente di correlazione  $\rho_{rv} = s_{rv}/s_{rc}s_{vc}$ , relativo alle coppie resistenza-velocità. Infine, sempre nella stessa tabella, sono riportati i risultati della procedura sopra descritta, in termini di valori mediani e caratteristici (frattili 5%), della resistenza stimata del calcestruzzo. A titolo di confronto, nelle colonne adiacenti, sono riportati i valori delle analoghe grandezze, stimati mediante la (4) sulla base delle sole misure dirette di resistenza delle carote.

Per il coefficiente angolare  $\beta$  della legge di regressione velocità-resistenza, nella procedura è stato preso il valore  $\beta = 2.0805$ , ottenuto sulla base di 322 coppie di dati, relativi ai calcestruzzi di numerosi edifici, differenti per epoca di costruzione e posizione geografica.

Gruppo	Dati relativi al gruppo									Carote e misure ultrasoniche		Solo carote	
	$n$	$n_c$	$\bar{r}_c$	$s_c$	$\bar{v}_c$	$s_{vc}$	$\rho$	$\bar{v}$	$s_v$	$R_{0,5}$ (MPa)	$R_{0,05}$ (MPa)	$R_{0,5}$ (MPa)	$R_{0,05}$ (MPa)
G1	27	7	3.50	0.185	1.33	0.023	0.593	1.33	0.037	33.07	24.07	33.07	22.92
G2	27	9	3.41	0.198	1.28	0.044	0.775	1.29	0.040	30.33	22.31	30.25	20.77
G3	18	5	3.53	0.143	1.36	0.024	0.299	1.35	0.021	33.90	26.11	34.21	25.01

Tabella 3 - Parametri statistici e stime della resistenza del calcestruzzo

I risultati mostrano come il tener conto delle misure indirette abbia un'influenza trascurabile sul valore mediano della resistenza, mentre, in linea di massima, porti ad un sensibile aumento del valore caratteristico, quindi ad una riduzione della stima della dispersione.

L'incremento più elevato del frattile (circa il 7.5%) lo si ottiene per il gruppo G2 caratterizzato da una stretta correlazione tra velocità e resistenze. Questo fattore, com'è ovvio, incide positivamente sul risultato fornito dal metodo combinato rispetto a quello che prevede il solo impiego delle carote, nonostante il numero di queste ultime sia relativamente elevato. Al contrario, il gruppo G3 presenta l'incremento più basso (4,4%), fatto giustificabile da un basso coefficiente di correlazione i cui effetti sono però compensati da un ridotto numero di carote e da una dispersione delle velocità particolarmente limitata. L'importanza di quest'ultimo fattore è sottolineata dal gruppo G1 che presenta un incremento del frattile molto simile al precedente (5,0%) nonostante una discreta correlazione tra resistenze e velocità, ma una dispersione delle misure ultrasoniche praticamente doppia ed un numero di carote leggermente più elevato.

## **Conclusioni**

In questo lavoro, utilizzando le tecniche dell'inferenza bayesiana, è esposta una procedura che consente di costruire la funzione di distribuzione della resistenza del calcestruzzo di una costruzione esistente, utilizzando sia i risultati di misure dirette (prove a rottura di carote) sia di misure indirette, non distruttive. Per questo secondo tipo di prove, nell'applicazione si è fatto espressamente riferimento alle misure delle velocità ultrasoniche, ma la procedura può essere estesa ad altri tipi di metodi non distruttivi. I risultati delle prove non distruttive vengono preliminarmente utilizzati per suddividere il lotto in zone composte con materiale omogeneo; quindi, utilizzando coppie resistenza-velocità, si costruisce una legge di correlazione con la quale si determina una distribuzione della resistenza basata solo sulle misure indirette; questa viene poi aggiornata con i risultati delle prove dirette, per costruire la distribuzione finale del materiale. L'applicazione ad alcuni casi reali ha mostrato che l'uso combinato dei due tipi di dati porta generalmente alla riduzione della dispersione stimata, in confronto a quella ottenuta usando i soli risultati diretti.

## **Riconoscimenti**

Questo lavoro è stato svolto e parzialmente finanziato nell'ambito del progetto esecutivo 2005-2008 del RELUIS, linea di ricerca n. 3.

## **Bibliografia**

1. Joint Committee on Structural Safety - "Probabilistic Model Code. Part 3. Material Properties", 2002.
2. G.E.P. Box et al. - "Bayesian Inference in Statistical Analysis", John Wiley and Sons Inc., 1992
3. R. Giannini et al. - "Affidabilità dei metodi d'indagine non distruttivi per la valutazione della resistenza del calcestruzzo", 10° Congresso Nazionale AIPnD, Ravenna, 2003
4. R. Giannini, L. Sguerri - "Tecniche bayesiane per la stima delle leggi di correlazione tra velocità ultrasonica e resistenza del calcestruzzo", Giornate AICAP 2004, Verona, 2004
5. Ph. Geyskens e al. - "Bayesian prediction of elastic modulus of concrete." Jour. Struc. Eng. (ASCE), V.124, 1, 1998