

PRISE EN COMPTE DANS LA MODÉLISATION D'UN PROBLÈME DE CND PAR CF D'UNE RÉGION CONDUCTRICE DE FAIBLE ÉPAISSEUR

TAKING INTO ACCOUNT A THIN CONDUCTING REGION IN AN EC- NDT PROBLEM

A. Ospina, L. Santandrea, Y. Le Bihan, C. Marchand
Laboratoire de Génie Electrique de Paris, CNRS UMR8507; SUPELEC; UPMC Univ Paris
06; Univ Paris-Sud; 11 rue Joliot-Curie, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex,
France. E-mail : alejandro.ospina@lgep.supelec.fr

Résumé

La méthode des éléments finis (MEF), par sa souplesse d'adaptation géométrique, rend possible le traitement d'une large variété de configurations. Cependant, l'étude de structures dont l'une des dimensions est faible (ex : dépôt, revêtement, fissure,...) entraîne des difficultés de maillage (forte densité d'éléments, risque d'avoir des éléments déformés). Le recours à des éléments dégénérés peut être une solution pour éviter ces problèmes. Ces éléments sont obtenus en ramenant un élément volumique dans un plan. Le travail proposé montre au travers d'une application (pièce contrôlée comportant un revêtement métallique mince) que ce type d'élément est bien adapté aux problèmes de CND par CF. Les formulations mises en œuvre utilisent les potentiels combinés $t - \phi$. La comparaison des premiers résultats obtenus avec des formulations analytiques est prometteuse.

Abstract

The finite element method has high geometric adaptation capabilities that make possible the calculation of a great variety of configurations. However, the study of special structures that have a geometric dimension smaller than others (e. g. thin cracks, coatings), create mesh difficulties (i. e. high element densities, deformed elements). The use of degenerated elements is a solution that avoids most of these problems. These elements are built converting a volume element in a two-dimensional element. This paper focuses in the application of these special elements in a NDT problem (testing of a piece that has a thin metallic coating) and verifies the correct adaptation of this technique for this kind of problem (NDT –EC). The combined potential formulations $t - \phi$ is used. The first results show a good agreement with analytical formulations.

INTRODUCTION

La modélisation numérique permet de concevoir et de qualifier de nouveaux types de capteurs CF. Parmi les méthodes de modélisation, la méthode des éléments finis (MEF) est bien adaptée aux problèmes qui ont des géométries complexes. C'est ce qui a étendu son utilisation à plusieurs domaines, en particulier, à la simulation des phénomènes électromagnétiques. Cependant, lors de la mise en œuvre de la MEF, une difficulté apparaît, liée à la façon dont l'espace est discrétisé -maillé-. Un mauvais maillage avec des éléments déformés peut aboutir à une solution erronée ou bien à un système algébrique mal conditionné.

Il existe des configurations pour lesquelles il est très difficile d'avoir un bon maillage et la seule façon de procéder à une bonne discrétisation implique une augmentation importante du nombre d'inconnues (degrés de liberté), ce qui va se traduire par une augmentation du temps de calcul. Afin de surmonter la difficulté que pose la modélisation de régions de faible épaisseur, de nombreuses méthodes ont été proposées, dont trois sont les plus couramment utilisées. La première est basée sur les conditions aux limites dans la région à faible épaisseur [1] [2]. La seconde combine la résolution éléments finis avec des intégrales de frontières [3]. Enfin la dernière repose sur la méthode des éléments coques sur laquelle est basée notre modélisation [4].

Par rapport aux autres méthodes, les éléments coques ont une forte capacité d'adaptation aux géométries complexes, ce qui est un atout important lorsqu'il s'agit d'appliquer la méthode aux problèmes de CND par CF. D'autre part, l'utilisation de ce type d'élément est compatible avec les formulations duales du problème de CF, ce qui permet d'exploiter les propriétés de complémentarité. Nous allons illustrer la procédure générale d'insertion des éléments coques dans un code éléments finis à partir d'un cas d'étude classique dans le contexte du CND par CF : le contrôle d'une pièce comportant un revêtement métallique fin.

DESCRIPTION DU PROBLEME

Les caractéristiques géométriques du problème correspondent à une configuration de CND par CF classique. Une bobine tenant le rôle d'émetteur/récepteur, est placée à proximité de la pièce à contrôler (la cible) qui est composée d'un substrat de faible conductivité sur lequel est déposé une fine couche de matériau conducteur (Figure 1). Le contrôle des caractéristiques physiques du dépôt se réalise en mesurant l'impédance de la bobine. Le domaine d'étude Ω peut être décomposé en un domaine conducteur Ω_c , le domaine occupé par la bobine Ω_0 , et l'air. Il faut noter que le domaine conducteur contient le substrat et le dépôt fin. Un domaine supplémentaire est pris en compte si on considère que la bobine possède un noyau ferromagnétique.

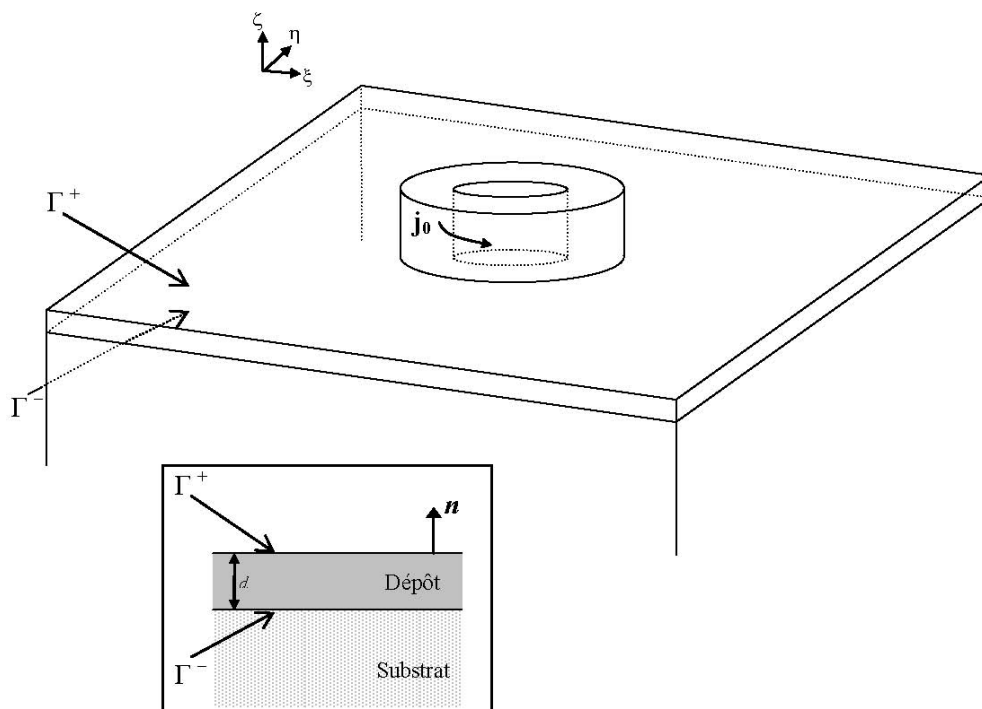


Figure 1. Géométrie du problème et détail du dépôt métallique.

Le problème physique est décrit par les équations de Maxwell simplifiées de façon à négliger les courants de déplacement en raison des basses fréquences utilisées dans le CND par CF.

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{e}) &= -\partial_t \mathbf{b} ; & \text{rot}(\mathbf{h}) &= \mathbf{j}_o + \mathbf{j} \\ \text{div}(\mathbf{b}) &= 0 ; & \mathbf{b} &= \mu \mathbf{h} ; & \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{e} \end{aligned}$$

Il faut noter que les courants dans le domaine d'étude sont de deux types : sources (\mathbf{j}_o) et induits ($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$).

LA FORMULATION EN POTENTIELS COMBINES $t - \phi$

L'objectif est de calculer le champ magnétique \mathbf{h} ou l'induction magnétique \mathbf{b} dans le domaine d'étude ainsi que les courants induits dans les sous-domaines conducteurs. Afin d'effectuer ce calcul, la méthode des éléments finis (MEF) est utilisée. Une des premières étapes lors de la mise en œuvre de la MEF est la substitution de l'espace continu par un maillage, processus qui permettra la discrétisation des variables physiques afin d'aboutir à une solution numérique.

Le champ magnétique \mathbf{h} peut être décomposé en deux potentiels, $\mathbf{h} = \mathbf{t} - \text{grad} \phi$, ce qui permet d'écrire la loi de Faraday à l'intérieur des matériaux conducteurs de la façon suivante

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot}(\mathbf{t}) \right) + \mu \partial_t (\mathbf{t} - \text{grad} \phi) = 0 \text{ dans } \Omega_c$$

Parallèlement, on résout $\text{div} \mathbf{b} = 0$ dans tous les domaines, en établissant une relation avec la loi de Faraday, relation qui se fera en prenant une dérivée temporelle de chaque côté de l'équation

$$\text{div}(\partial_t \mathbf{b}) = \text{div}(\mu \partial_t (\mathbf{t} + \mathbf{t}_o - \text{grad} \phi)) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Cette formulation permet d'avoir une continuité au sens fort de la composante tangentielle du champ \mathbf{h} et par conséquent de la composante normale de \mathbf{j} .

Une fois le problème posé, l'écriture de ces équations sous forme intégrale permet de faire une discrétisation de l'espace et des variables physiques utilisées. L'espace total est ainsi divisé par des éléments polyédriques, dans le cas présent des tétraèdres. La variable principale (champ scalaire ou potentiel) est discrétisée par l'intermédiaire d'une relation entre les grandeurs aux nœuds ou aux arêtes du maillage produit. Cette relation est établie par des fonctions d'interpolation. Ceci va créer une famille de champs locaux dans chaque sous-espace.

LES ELEMENTS COQUES

Plusieurs problèmes apparaissent au moment d'établir le maillage. Si la différence de taille des objets sous étude est très importante, par exemple : si les régions conductrices ont certaines dimensions géométriques très petites par rapport à celles des autres régions du problème, l'obtention d'un maillage approprié sera difficile. Il ne doit pas être trop fin, ce qui augmente le nombre d'inconnues, ni trop lâche afin de ne pas avoir des éléments très déformés. Dans tous les cas, l'amélioration de la qualité du maillage implique toujours une

augmentation importante du nombre des inconnues, ce qui peut nuire la convergence du système algébrique.

Afin de surmonter le problème induit par le maillage des zones de faible épaisseur, un nouveau type d'élément est introduit dans notre problème, défini comme l'élément coque.

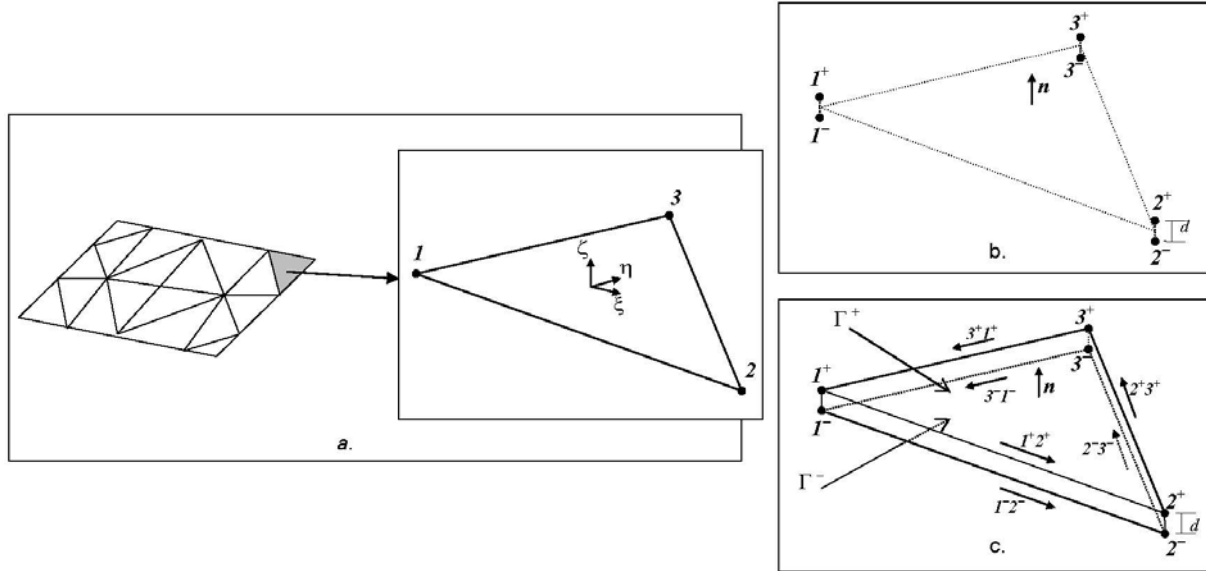


Figure 2. L'élément coque. a.) Maillage de la surface et détail d'un élément. b.) Dédoublé des nœuds. c.) Dédoublé des arêtes.

L'approche des éléments coques consiste à effectuer une transformation de la dimension des objets minces. S'il s'agit d'un problème 3D la région mince sera transformée par une surface, on prendra en compte l'épaisseur de la région lors de la formulation du problème au lieu de le faire pendant la phase du maillage. Cela signifie, dans notre exemple, que pendant le processus de maillage, on ne considère pas le dépôt métallique, il sera remplacé par sa surface moyenne Γ_s . Une fois que le maillage est établi, on récupère les triangles produits dans cette surface (Le maillage volumique ayant été effectué avec des tétraèdres). On dédouble le maillage produit en le projetant de chaque côté de la région mince sur les surfaces frontières Γ^+ et Γ^- .

Les fonctions d'interpolation nodales et d'arêtes

Afin d'insérer les éléments coques dans un code éléments finis, une des premières étapes est de substituer la région mince par une surface et ensuite définir le maillage de celle-ci. Les fonctions d'interpolation nécessaires pour le calcul des champs scalaire et vectoriel en tout point de la région mince seront définies à partir de ce maillage surfacique. Ces fonctions d'interpolations pour un élément coque nodal (d'ordre 0) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} w_{C1-}^0 &= w_{t1-}^0 \alpha^- & w_{C1+}^0 &= w_{t1+}^0 \alpha^+ \\ w_{C2-}^0 &= w_{t2-}^0 \alpha^- & w_{C2+}^0 &= w_{t2+}^0 \alpha^+ \\ w_{C3-}^0 &= w_{t3-}^0 \alpha^- & w_{C3+}^0 &= w_{t3+}^0 \alpha^+ \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} w_{t1-}^0 &= w_{t1+}^0 = w_{t1}^0 \\ w_{t2-}^0 &= w_{t2+}^0 = w_{t2}^0 \\ w_{t3-}^0 &= w_{t3+}^0 = w_{t3}^0 \end{aligned}$$

$$\alpha^- = 1/2 - \zeta/d \quad \text{et} \quad \alpha^+ = 1/2 + \zeta/d$$

Les w_{ti}^0 sont les fonctions d'interpolations nodales d'un élément triangulaire qui sont définies dans le repère barycentrique de la façon suivante (voir figure 2a)

$$\begin{aligned}w_{t1}^0 &= 1 - \xi - \eta \\w_{t2}^0 &= \xi \\w_{t3}^0 &= \eta\end{aligned}$$

Les fonctions d'interpolation pour les éléments coques d'arête (d'ordre 1) sur les surfaces Γ^- et Γ^+ sont définies par :

$$\begin{aligned}w_{C_{i^-j^-}}^1 &= w_{C_{i^-}}^0 \mathbf{grad} w_{C_{j^-}}^0 - w_{C_{j^-}}^0 \mathbf{grad} w_{C_{i^-}}^0 \\w_{C_{i^+j^+}}^1 &= w_{C_{i^+}}^0 \mathbf{grad} w_{C_{j^+}}^0 - w_{C_{j^+}}^0 \mathbf{grad} w_{C_{i^+}}^0\end{aligned}$$

On notera une arête i^-j^- sur la surface Γ^- comme k^- (arêtes parallèles à Γ_s), de même pour les arêtes i^+j^+ sur la surface Γ^+ qui seront nommées k^+ , après quelques manipulations on obtient :

$$\begin{aligned}w_{C_{k^-}}^1 &= w_{t_{k^-}}^1 \alpha^- = w_{t_k}^1 \alpha^- \\w_{C_{k^+}}^1 &= w_{t_{k^+}}^1 \alpha^+ = w_{t_k}^1 \alpha^+\end{aligned}$$

Pour les arêtes normales qui relient les deux surfaces, (du type i^-i^+), notées par la suite k^\pm , les fonctions d'interpolations sont définies par

$$w_{C_{k^\pm}}^1 = w_{C_{i^-}}^0 \mathbf{grad} w_{C_{i^+}}^0 - w_{C_{i^+}}^0 \mathbf{grad} w_{C_{i^-}}^0$$

Ce qui après quelques substitutions devient

$$w_{C_{k^\pm}}^1 = \frac{w_{t_i}^0}{d} \mathbf{n}$$

Où \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface de l'élément coque (voir Figure 2b).

Approximation des champs scalaire et vectoriel

Si on suppose l'existence d'un champ scalaire ϕ et vectoriel \mathbf{b} dans la région mince (le dépôt), ils peuvent être approximés en utilisant les fonctions d'interpolation des éléments coques. Le champ scalaire sera décrit en fonction de ses valeurs aux nœuds ϕ_i

$$\phi = \sum_{i \in N} w_{C_i}^0 \phi_i$$

où N est l'ensemble des sommets dans les surfaces Γ^+ et Γ^- . De façon similaire, on peut représenter le champ vectoriel \mathbf{b} en fonction de ses circulations aux arêtes :

$$\mathbf{b} = \sum_{k \in A} \mathbf{w}_{C_k}^1 b_k + \sum_{i^\pm \in A_p} \mathbf{w}_{C_{i^\pm}}^1 b_{n_{i^\pm}}$$

où A est l'ensemble des arêtes dans les surfaces Γ^+ et Γ^- . b_k est la circulation du champ vectoriel sur ces arêtes. La circulation du champ vectoriel sur les arêtes normales (A_p) a été nommée b_{n_i} . Une fois réalisée la discrétisation des différents champs il est possible de calculer en utilisant ces approximations le gradient et le rotationnel,

$$\mathbf{grad} \phi = \sum_{i \in N} \left(\left[\alpha^- \mathbf{grad}_S w_{t_i}^0 \quad -\frac{w_{t_i}^0}{d} \mathbf{n} \right] \phi_i^- + \left[\alpha^+ \mathbf{grad}_S w_{t_i}^0 \quad \frac{w_{t_i}^0}{d} \mathbf{n} \right] \phi_i^+ \right)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{b} = \sum_{k^- \in A^-} \left(\alpha^- \mathbf{rot}_S \mathbf{w}_{t_k}^1 - \frac{1}{d} \mathbf{n} \times \mathbf{w}_{t_k}^1 \right) b_{k^-} + \sum_{k^+ \in A^+} \left(\alpha^+ \mathbf{rot}_S \mathbf{w}_{t_k}^1 + \frac{1}{d} \mathbf{n} \times \mathbf{w}_{t_k}^1 \right) b_{k^+} + \dots$$

$$\sum_{i^\pm \in A_p} \left(\frac{1}{d} \mathbf{grad}_S w_{t_i}^0 \times \mathbf{n} \right) b_{n_{i^\pm}}$$

RESULTATS

Afin de valider l'approche des éléments coques, nous considérons les dimensions géométriques proposés au problème TEAM 15 de la COMPUMAG [5] synthétisées dans le tableau suivant :

<i>Dimensions de la bobine</i>	
<i>Rayon interne</i>	$6.15 \pm 0.05 \text{ mm}$
<i>Rayon externe</i>	$12.4 \pm 0.05 \text{ mm}$
<i>Hauteur</i>	$6.15 \pm 0.1 \text{ mm}$
<i>Nombre de spires</i>	3790
<i>Séparation bobine-dépôt (Lift-off)</i>	0.88 mm
<i>Le dépôt métallique et le substrat (Cas1)</i>	
<i>Conductivité</i>	$3.06 \pm 0.02 \times 10^7 \text{ S/m}$
<i>Epaisseur</i>	43.4 mm
<i>Autres paramètres</i>	
<i>Fréquence</i>	900 Hz
<i>Pénétration du champ (effet de peau) à 900Hz</i>	3.04 mm

Pour le premier calcul et afin d'avoir une valeur de référence pour l'impédance, on élimine le dépôt, et on suppose un substrat ayant la conductivité indiquée au tableau ci-dessus. Ce cas nous permet de calculer l'impédance de la bobine en utilisant des éléments tétraédriques classiques, les valeurs obtenues sont montrés ci-dessous :

<i>Nombre d'éléments du maillage</i>	91827
<i>Calcul de l'impédance de la bobine</i>	
<i>Calcul formulation $\mathbf{t}-\phi$</i>	$108.201 + i1036.52 \Omega$
<i>Nombre d'itérations</i>	1 227

Le maillage construit avec des éléments tétraédriques dans la région à faible épaisseur peut aboutir sur deux problèmes. Soit, les éléments « s'aplatissent » à l'intérieur de cette région, c'est à dire, ils se déforment (voir figure 3c), ce qui va être la cause d'une augmentation du nombre d'itérations. Soit le nombre d'éléments doit augmenter, augmentation qui sera d'autant plus important que l'épaisseur de la région est faible. Pour un dépôt de 80 micromètres les différents résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Nombre d'éléments du maillage	96974
Impédance de la bobine - calcul formulation $t-\phi$	$109.109 + i1040.5 \Omega$
Nombre d'itérations	1 545

Maintenant, le dépôt est remplacé par les éléments coques, en prenant les mêmes dimensions géométriques. Les résultats sont montrés ci-dessous :

Nombre d'éléments tétraédriques	92601
Nombre d'éléments coques	1344
Impédance de la bobine - calcul formulation $t-\phi$	$106.83 + i1029.73 \Omega$
Nombre d'itérations	1 658
Impédance de la bobine - calcul analytique	$120+i1010 \Omega$

Pour cette épaisseur, la solution avec un maillage tétraédrique est comparable à celle obtenue avec un maillage contenant des éléments coques. Cependant, pour des épaisseurs au dessous de 10 micromètres la maille tétraédrique dans la région mince est trop déformée et la convergence du calcul ne permet pas d'avoir des résultats avec ce type de maillage, ce qui justifie l'utilisation des éléments coques.

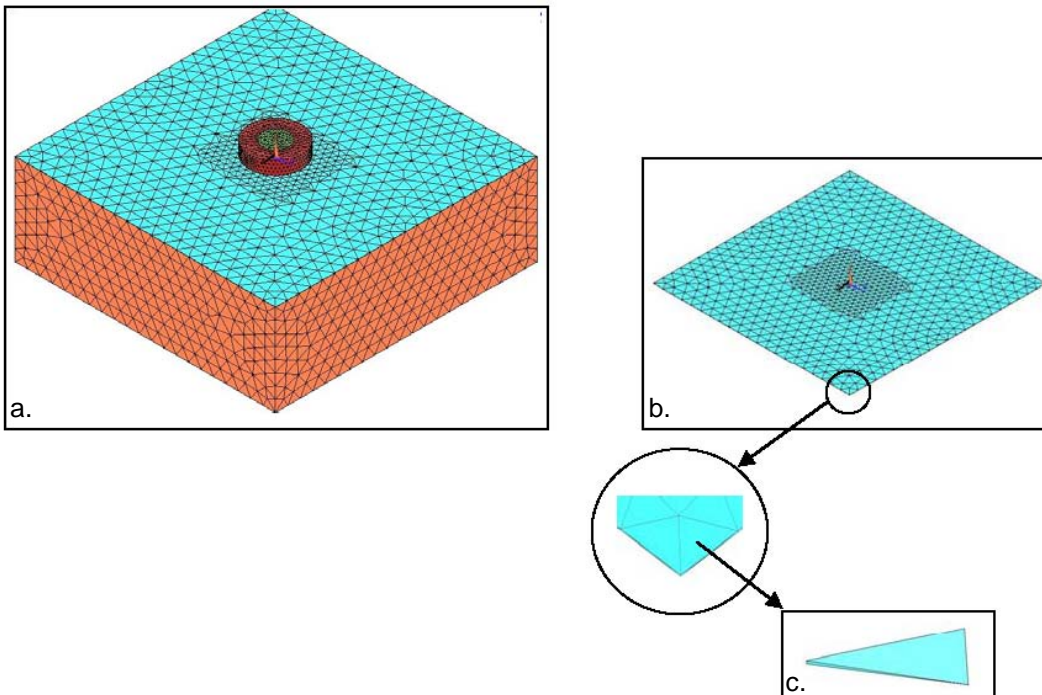


Figure 3. a) Maillage tétraédrique du problème. b) Détail du maillage de la région mince (le dépôt). c) Élément tétraédrique à l'intérieur de la région mince.

Comme second exemple, on considère que la conductivité du dépôt est plus élevée que celle du substrat, en particulier on prendra une couche de platine (9.66 MS/m) déposé sur un substrat en alliage à base nickel (0,65 MS/m). La disposition géométrique sera la même et l'épaisseur du dépôt varie entre un millimètre et un micromètre. Les résultats sont présentés dans la figure 4. On observe une bonne approximation pour de faibles valeurs d'épaisseur, mais, lorsqu'elle augmente, l'écart augmente par rapport au calcul analytique. Cet écart s'explique à cause de la profondeur de pénétration du champ qui devient comparable à l'épaisseur du dépôt. Le courant ne varie plus de façon linéaire suivant la profondeur du dépôt. La distribution spatiale des champs est montrée pour une épaisseur de dépôt d'un micromètre à la figure 5.

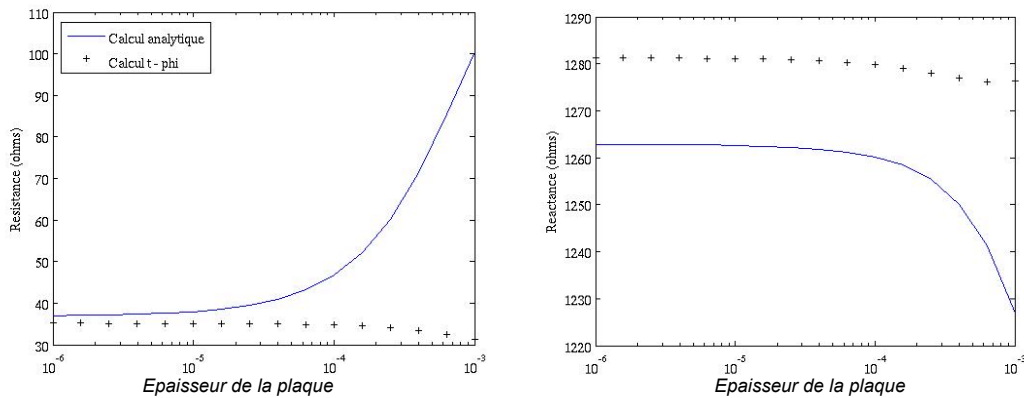


Figure 4. Calcul de l'impédance. a) Résistance. b) Réactance.

CONCLUSIONS

Les éléments coques représentent une solution viable pour le calcul des champs dans des régions à faible épaisseur. Ils sont obtenus en déformant des éléments prismatiques, ce qui permet de réduire la région volumique de faible épaisseur à une surface et en conséquence de s'affranchir du maillage volumique. L'application de ce type d'éléments pour des simulations MEF appliquées au CND par CF est un outil facile à mettre en œuvre et qui représente bien les phénomènes physique des zones à faible épaisseur quand le maillage volumique devient délicat à réaliser (voir impossible dans certains cas).

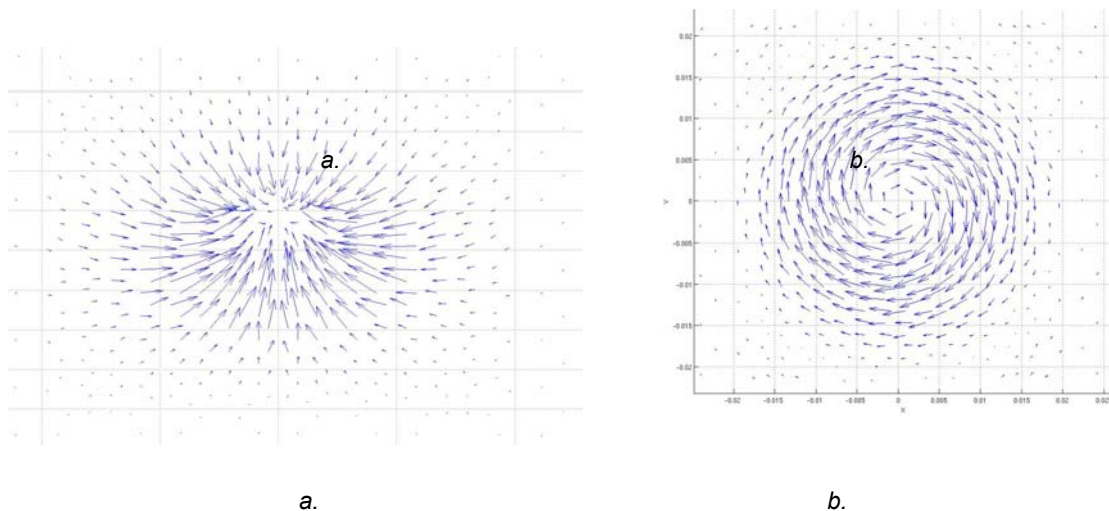


Figure 5. Distribution spatiale des champs dans le plan du dépôt. a) Induction magnétique b) Courants induits.

REFERENCES

- [1] C., Geuzaine; P., Dular; W., Legros, "Dual formulations for the modelling of thin electromagnetic shells using edge elements," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, no. 4, pp. 799-803, Jul 2000.
- [2] Y. Choua; L. Santandrea; Y. Le Bihan; C. Marchand, "Thin Crack Modeling in ECT with Combined Potential Formulations," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, no. 4, pp. 1789-1792, Apr 2007.

- [3] Y. Le Bihan; J. Pavo; C. Marchand, "Calculation of ECT signal of a minute crack by FEM-BIM hybrid method" *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 28, pp. 355-360, 2004.
- [4] Z. Ren, "Degenerated Whitney Prism Elements - General Nodal and Edge shell Elements for field computation in thin structures," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, no. 5, pp. 2547-2550, Sept 1998.
- [5] <http://www.compumag.co.uk/team.html>