
Multiresolutionsanalyse in der Computertomographie

S. Oeckl

Fraunhofer Entwicklungszentrum Röntgentechnik, eine gemeinsame Abteilung der Fraunhofer Institute IZFP Saarbrücken und IIS Erlangen

DGZfP-Jahrestagung

14.05.-16.05.2007, Fürth

Ohl 2006

Seite 1



Einführung	-
Prinzip der Multiresolutionsanalyse	
Multiresolutionsanalyse und CT-Rekonstruktion	
Ergebnisse	
Zusammenfassung	

Inhalt

- Einführung
- Prinzip der Multiresolutionsanalyse
- Multiresolutionsanalyse und CT-Rekonstruktion
- Ergebnisse
- Zusammenfassung

Ohl 2006

Seite 2

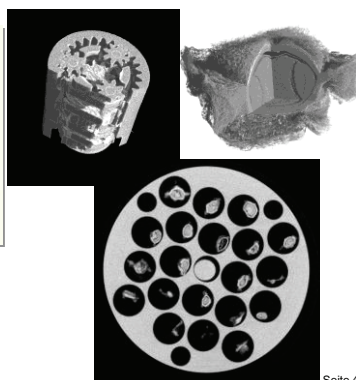
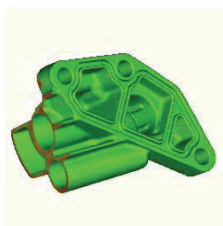


Inhalt

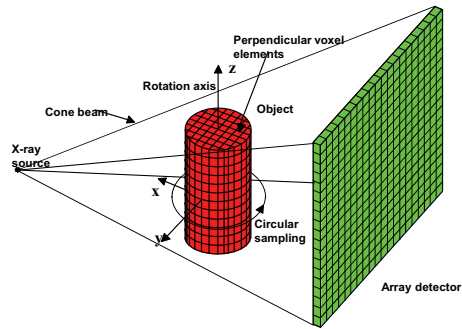
- **Einführung**
- Prinzip der Multiresolutionsanalyse
- Multiresolutionsanalyse und CT-Rekonstruktion
- Ergebnisse
- Zusammenfassung

CT in der zerstörungsfreien Materialprüfung

- Komplette dreidimensionale Erfassung des Prüfobjekts
- Berührungsloses Prüfverfahren



Aufnahmegeometrie (Kegelstrahl)



Ohl 2006

Seite 5

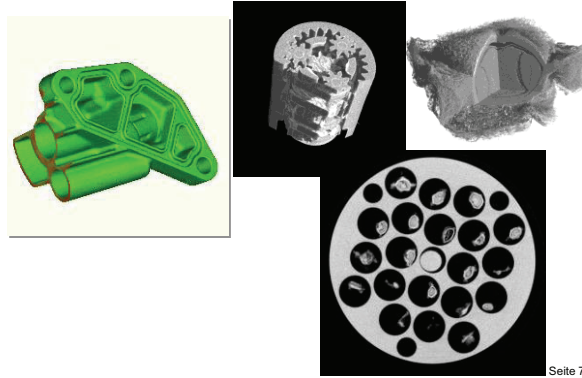
Resourcen

Detektorgröße	Projektionen	Belichtungszeit	Messzeit	Rekonstruktionszeit (1 CPU)	Volumengröße
512 x 512	400	> 400 ms	> 4 min	1,4 min	105 MB
1024 x 1024	800	> 400 ms	> 8 min	26 min	800 MB
2048 x 2048	1600	> 400 ms	> 16 min	690 min	6 400 MB

Ohl 2006

Seite 6

Welche Regionen sind von Interesse?



Ohl 2006

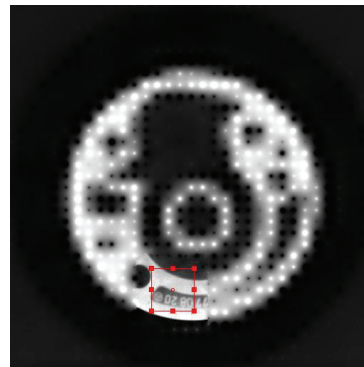
Seite 7

Ziel

Rekonstruktion einer „Region-of-Interest“

Ansatz

Multiresolutionsanalyse in der CT



Ohl 2006

Seite 8

Inhalt

- Einführung
- **Prinzip der Multiresolutionsanalyse**
- Multiresolutionsanalyse und CT-Rekonstruktion
- Ergebnisse
- Zusammenfassung

Definition

Eine Folge $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ abgeschlossener Teilräume des $L^2(\mathbb{R})$ heißt *Multiresolutionsanalyse* (MRA), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\{0\} \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$,
2. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$,
3. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$,
4. $f \in V_{j-1} \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_j$,
5. $f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j \forall k \in \mathbb{Z}$,
6. $\exists \varphi \in V_0 : (\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ist eine Riesz basis des V_0 . Die Funktion φ heißt *Skalierungsfunktion* der MRA.

(Mallat 1989, *A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation*)

Satz

Sei $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Multiresolutionsanalyse. Dann existiert ein zugehöriger **Tiefpassfilter** L und ein zugehöriger **Hochpassfilter** H , so dass

$$L^*L + H^*H = I$$

gilt, wobei L^* und H^* die adjungierten Filter von L und H bezeichnen.

Analyse und Synthese



$$L^*L + H^*H = I$$

Analyse und Synthese



$$L^*L + H^*H = I$$

Analyse und Synthese



$$L^*L + H^*H = I$$

Analyse und Synthese



↓ L



$$L^*L + H^*H = I$$

Analyse und Synthese



↓ L

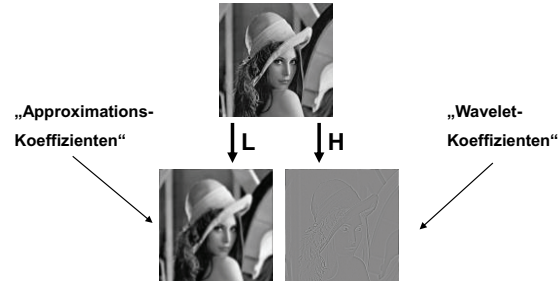
↓ H



$$L^*L + H^*H = I$$

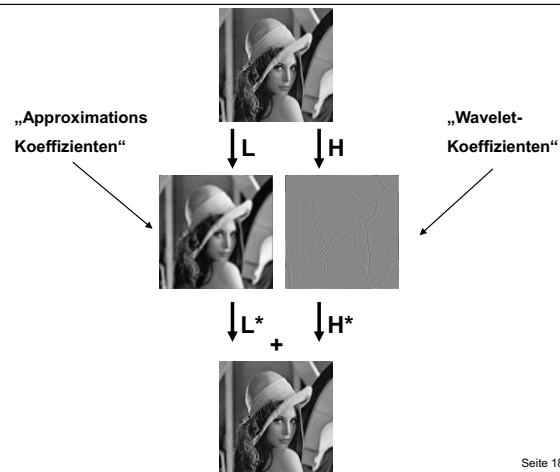
Analyse und Synthese

$$L^*L + H^*H = I$$



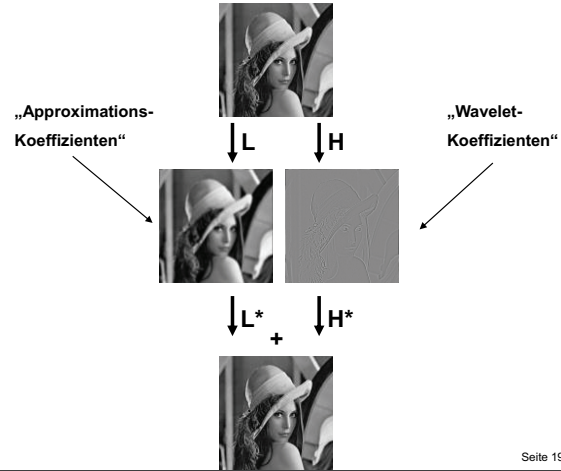
Analyse und Synthese

$$L^*L + H^*H = I$$



Analyse und Synthese

$$L^*L + H^*H = I$$

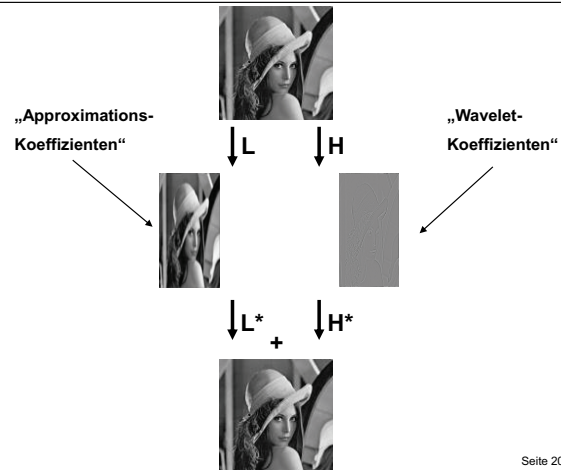


Ok 2006

Seite 19

Analyse und Synthese

$$L^*L + H^*H = I$$

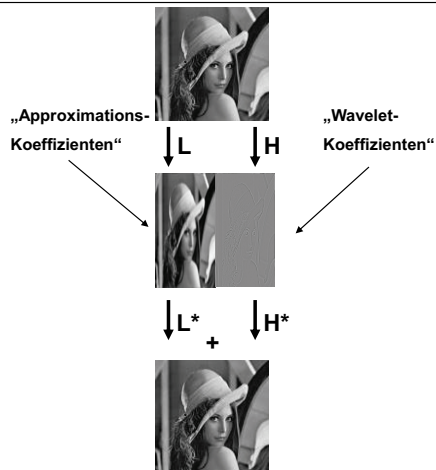


Ok 2006

Seite 20

Analyse und Synthese

$$L^*L + H^*H = I$$



Ok 2006

Seite 21

Analyse und Synthese



Ok 2006

Seite 22

Analyse und Synthese

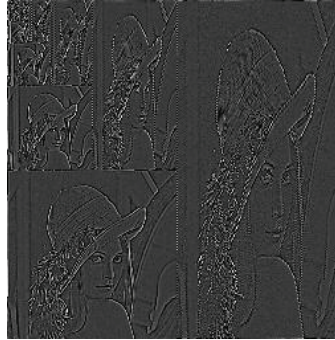


Analyse und Synthese



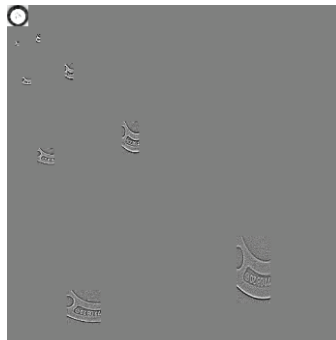
Applikationen

- Rauschreduktion
- Datenkompression



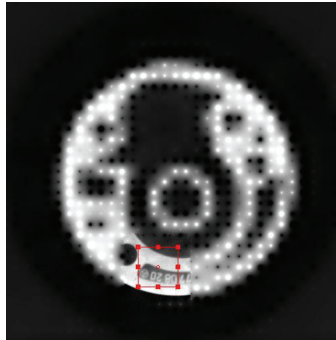
Applikationen

- Rauschreduktion
- Datenkompression
- Lokale Synthese



Applikationen

- Rauschreduktion
- Datenkompression
- Lokale Synthese



Frage

Ist es möglich die
Approximations- und
Wavelet-Koeffizienten direkt
aus den Projektionsdaten
zu rekonstruieren?



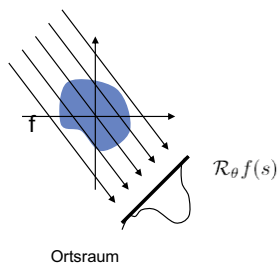
Inhalt

- Einführung
- Prinzip der Multiresolutionsanalyse
- **Multiresolutionsanalyse und CT-Rekonstruktion**
- Ergebnisse
- Zusammenfassung

Definition

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in S^{n-1}$, und $s \in \mathbb{R}$ ist die **Radon-Transformation** definiert durch

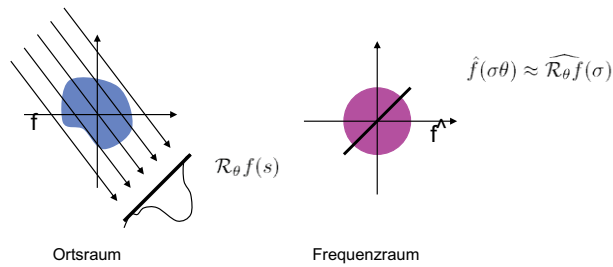
$$\mathcal{R}_\theta f(s) := \mathcal{R}f(\theta, s) := \int_{\theta^\perp} f(s\theta + t) dt.$$



Fourier-Schicht-Theorem

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in S^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$, und $\sigma \in \mathbb{R}$ gilt

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta)$$



Ohl 2006

Seite 31

Gefilterte Rückprojektion

$$f(x, y) = \int_{[0, \pi]} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) |\omega| e^{i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta$$

Gefilterte Rückprojektion für Wavelet-Koeffizienten-Rekonstruktion

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{[0, \pi]} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) |\omega| \widehat{\mathcal{R}_\theta \psi}(\omega) e^{i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta$$

Ohl 2006

Seite 32

Inhalt

- Einführung
- Prinzip der Multiresolutionsanalyse
- Multiresolutionsanalyse und CT-Rekonstruktion
- **Ergebnisse**
- Zusammenfassung

Filter

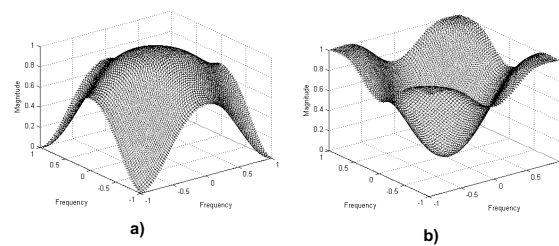


Fig. 1: 2D-Near-Coiflet-Filter. a) Tiefpass-Filter. b) Hochpass-Filter.

2D-MRA-CT (Shepp-Logan-Phantom)

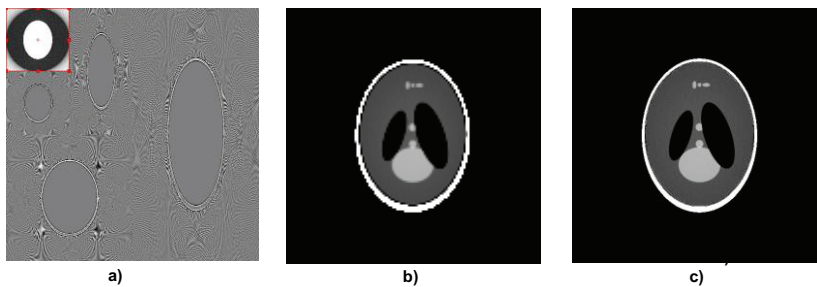


Fig. 2: 2D-Fächerstrahl-Rekonstruktion: a) Approximations- und Wavelet-Koeffizienten bei Zerlegungsstufe 4. b) Vergrößerung der Approximations-Koeffizienten aus a) (rot markierte Region). c) Synthese der Koeffizienten aus a). (Kontrastbereich: a) [-0.27; 0.27]. b)-c) [1.0; 1.026].)

Ohl 2006

Seite 35

3D-MRA-CT (Typ Feldkamp)

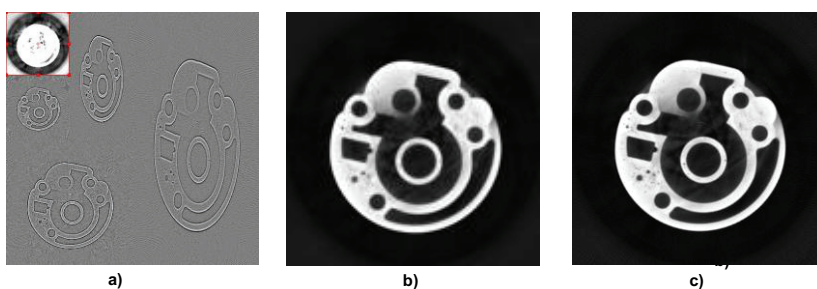


Fig. 3: 3D-Kegelstrahl-Rekonstruktion (Typ Feldkamp): a) Approximations- und Wavelet-Koeffizienten bei Zerlegungsstufe 4. b) Vergrößerung der Approximations-Koeffizienten aus a) (rot markierte Region). c) Synthese der Koeffizienten aus a). (Kontrastbereich: a) [-0.27; 0.27]. b)-c) [0.0; 5.89].)

Ohl 2006

Seite 36

Region-of-Interest-Rekonstruktion mittels MRA-CT (Typ Feldkamp)

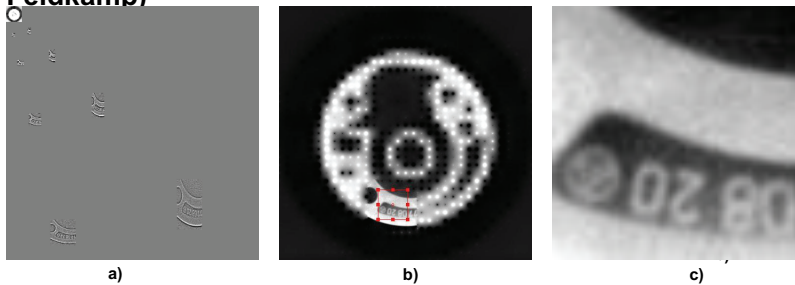


Fig. 4 : Region-of-Interest-Rekonstruktion: a) Approximations- und Wavelet-Koeffizienten bei Zerlegungsstufe 4. b) Vergrößerung der Approximations-Koeffizienten aus a). c) Vergrößerung der Region-of-Interest aus b). (Kontrastbereich: a) [-0.27; 0.27]. b)-c) [0.0; 5.89].)

Ohl 2006

Seite 37

Inhalt

- Einführung
- Prinzip der Multiresolutionsanalyse
- Multiresolutionsanalyse und CT-Rekonstruktion
- Ergebnisse
- **Zusammenfassung**

Ohl 2006

Seite 38

Zusammenfassung

- Starker Zusammenhang zwischen Radon-Transformation und Multiresolutionanalyse
- Region-of-Interest-Rekonstruktion mittels MRA-CT
- Zeit- und Datenreduktion mittels Region-of-Interest-Rekonstruktion

Ausblick

- Datenkompression während Rekonstruktion
- Rekonstruktion der 3D-Wavelet-Koeffizienten