

MFL en tubos de acero: simulaciones numéricas con FEM & BEM-FEM

Tomás Guozden

Instituto Balseiro and Centro Atómico Bariloche, CNEA

Bariloche, Río Negro, (8400) Argentina

tel 02944 445170

fax 02944 445259

tguozden@cab.cnea.gov.ar

Javier Etcheverry, Gustavo Sánchez, Martín Argañaraz

CINI, Tenaris Siderca

Campana, Pcia. Buenos Aires, (B2804MHA), Argentina

Abstract

Magnetic flux leakage (MFL) is one of the most widely used techniques for non-destructive inspection of steel pipes. There are several different equipment designs that specialize in the detection of longitudinal, or transversal, or surface defects. It is also possible, sometimes, to infer the location of the defect from the form of the MFL signal. In order to achieve a better defect detection and improve the classification, it is important to be able to investigate how the detected signal depends on the relevant parameters (location and shape of the defect, excitation field intensity, magnetic properties of the inspected material, etc.).

We report results in 2D and 3D. The 2D simulations use a standard finite elements method, including the nonlinear behavior of the material. The computations performed in 3D use a coupling between boundary elements (to approximate the problem in air and in non-ferromagnetic materials) and finite elements for the steel. This approach provides a formulation where only ferromagnetic parts need to be meshed, thus simplifying the set-up of the complex geometries involved. The model includes the hysteretic behavior of the steel, and allows the evaluation of the final magnetization states, the simulation of demagnetization strategies, etc.

1. Introducción

Una de las técnicas más utilizadas en la inspección no destructiva de tubos de acero es la de flujo magnético disperso (MFL), que consiste en detectar el campo magnético expulsado por los eventuales defectos. Esta expulsión ocurre tanto en la cara en la que aflora la fisura como en la cara opuesta, y es significativa sólo cuando las líneas de campo son aproximadamente perpendiculares a la dirección de la fisura. Esto motiva que existan distintos tipos de equipos especializados en detectar fisuras longitudinales, transversales, etc. Un análisis sencillo de la forma del campo expulsado permite habitualmente decidir además si los defectos se encuentran en la cara exterior o interior del tubo.

Para mejorar el sistema de detección es necesario investigar cómo se produce la señal, y cuál es su dependencia con el tipo de falla y su ubicación, la intensidad del campo aplicado, las propiedades magnéticas del acero, etc. En este trabajo se detalla una estrategia posible para resolver el problema de un cuerpo ferromagnético sometido a campos externos en el caso estacionario. La histéresis ferromagnética está contemplada en el modelado a través del uso de modelos de Preisach,⁽¹⁾ permitiendo investigar el estado magnético final del sistema luego de la inspección.

Existe una gran variedad de abordajes a los problemas descriptos, utilizando elementos finitos, y modelos de histéresis.^(2,3) La formulación numérica utilizada en este trabajo consiste en utilizar una discretización estándar por elementos finitos⁽⁴⁾ en el caso 2D, y una formulación mixta de elementos finitos para los medios materiales con elementos de contorno⁽⁵⁾ para el aire en 3D. Esto evita la necesidad de generar mallas para el aire, y facilita la imposición de las condiciones de contorno en el infinito. En particular, se obtiene de este modo una flexibilidad importante cuando hay partes en movimiento relativo (suficientemente lento como para poder despreciar las corrientes inducidas).

En las secciones siguientes se detallan las formulaciones utilizadas para las ecuaciones de Maxwell, y su discretización numérica, y, por último, se muestran algunos resultados obtenidos.

2. Ecuaciones de Maxwell magnetostáticas

Las ecuaciones de Maxwell en el caso magnetostático se escriben:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

donde \mathbf{H} es el campo magnético y \mathbf{B} la inducción magnética, relacionadas a través de $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Aquí \mathbf{M} es la magnetización y μ_0 la permeabilidad magnética del vacío. Estas ecuaciones deben ser complementadas con una relación constitutiva

que permita determinar la magnetización dado el campo magnético (y su historia, en el caso de modelos de histéresis) y condiciones de contorno adecuadas.

2.1. *Potencial escalar magnético reducido*

Las ecuaciones de la magnetostática pueden formularse sencillamente a partir de un potencial escalar.⁽⁶⁾ De la ley de Ampère, se tiene que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Separando \mathbf{H} en la contribución de las corrientes y la de los medios materiales:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_c + \tilde{\mathbf{H}}, \quad (3)$$

resulta que \mathbf{H}_c es solución de:

$$\nabla \times \mathbf{H}_c = \mathbf{J} \quad (4)$$

y por lo tanto

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad (5)$$

en todo el espacio. De este modo $\tilde{\mathbf{H}}$ puede escribirse como el gradiente de un potencial ϕ , llamado potencial escalar magnético reducido (para diferenciarlo del potencial escalar magnético total, que vale sólo en una región simplemente conexa del espacio donde \mathbf{J} es cero):

$$\tilde{\mathbf{H}} = -\nabla\phi. \quad (6)$$

La ecuación a resolver para el potencial ϕ se deduce a partir de la relación

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu_0(\tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{H}_c + \mathbf{M})) = 0. \quad (7)$$

\mathbf{H}_c se puede calcular utilizando la fórmula de Biot-Savart, resultando con divergencia nula. Queda entonces:

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (8)$$

donde \mathbf{M} está dado por la relación constitutiva

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}_c + \tilde{\mathbf{H}}) = \mathbf{M}(\mathbf{H}_c - \nabla\phi). \quad (9)$$

2.2. *Potencial vector*

Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, la inducción magnética se puede expresar como el rotor de un campo vectorial \mathbf{A} , llamado potencial vector, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Este campo vectorial está especificado a menos de un campo de rotor nulo. Para obtener una única solución es necesario agregar alguna condición adicional (condición de *gauge*). La ley de Ampère se escribe entonces como:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}, \quad (10)$$

y debe ser complementada con la ecuación constitutiva 9 y una condición de gauge. Si se elige el gauge de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, el problema se reescribe:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{M}. \quad (11)$$

Esta formulación es especialmente simple en 2D, ya que el potencial vector \mathbf{A} se reduce a una función escalar: $\mathbf{A}(x, y) = (0, 0, A(x, y))$.

En muchos casos se puede suponer que la relación constitutiva es $\mathbf{B} = \mu(\mathbf{B})\mathbf{H}$ (medio no lineal), o aun $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (medio lineal). En este caso, la ecuación para el potencial vector 10 puede ser reescrita:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu(\nabla \times \mathbf{A})} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (12)$$

En el caso de materiales ferromagnéticos esta aproximación es adecuada cuando los efectos de histéresis no son importantes (por ejemplo, cuando el material está suficientemente saturado, o cuando el ciclo de histéresis es muy delgado). Si la histéresis ferromagnética es relevante para la descripción, como al estudiar la magnetización residual, o los procesos de desmagnetización, se debe trabajar con modelos como los de Preisach, Jiles-Atherton, etc. que la describen de forma aproximada.

3. Métodos numéricos

Las ecuaciones anteriores para el potencial vector se pueden resolver mediante una aplicación estándar del método de elementos finitos. En particular, el caso de 2 dimensiones espaciales cae perfectamente dentro del alcance de códigos de probada eficiencia y versatilidad. Este es el caso del código de multigrilla adaptivo de dominio público para problemas elípticos PLTMG,⁽⁷⁾ utilizado para las simulaciones 2D presentadas en este trabajo.

En el caso 3D, es posible trabajar con la formulación del potencial vector (10 o 12), que involucra resolver un problema con 3 incógnitas por nodo. Más económico desde el punto de vista del uso de memoria, y con la ventaja de que es más simple imponer las condiciones de contorno correctas en infinito, es utilizar las ecuaciones para el potencial magnético reducido 8, discretizando el material ferromagnético por elementos finitos, y los materiales lineales (en particular, el aire) por medio de elementos de contorno. Esta formulación tiene el atractivo adicional que en el caso de materiales en movimiento relativo, no es necesario remallar el aire de posición en posición (aunque sí es necesario recalculer algunos de los elementos del sistema de ecuaciones resultante). En lo que sigue de esta sección se resumen los aspectos fundamentales de una formulación de este abordaje numérico.

3.1. Elementos de borde

En los materiales no magnéticos la ecuación 8 se reduce a resolver la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$. Consideremos esta región como el complemento de una región cerrada Ω determinada por los materiales magnéticos. Si $\psi(x, x')$ representa la función de Green del laplaciano en todo el espacio, utilizando la segunda identidad de Green se obtiene:

$$\int_{\Omega^c} (\phi(x)\Delta\psi(x, x') - \psi(x, x')\Delta\phi(x))d\Omega = \int_{\Omega^c} \nabla \cdot (\phi(x)\nabla\psi(x, x') - \psi(x, x')\nabla\phi(x))d\Omega, \quad (13)$$

que teniendo en cuenta que el $\Delta\phi = 0$, y que

$$\Delta\psi(x, x') = \Delta\frac{1}{\|x - x'\|} = -4\pi\delta(x, x') \quad (14)$$

se reduce a

$$c(x')\phi(x') = \int_{\Gamma^c} (\phi(x)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x, x') - \psi(x, x')\frac{\partial\phi^e}{\partial n}(x))dS, \quad (15)$$

donde Γ^c es la frontera de Ω^c , es decir, la normal a Γ^c apunta hacia adentro de Ω , y se utiliza la notación $\frac{\partial\phi^e}{\partial n}(x)$ para representar la derivada normal del potencial en el borde evaluada en Ω^c . El valor de $c(x')$ está dado por

$$c(x') = \begin{cases} 0 & x' \in \Omega \\ \delta\theta & x' \in \Gamma \\ 4\pi & x' \in \Omega^c \end{cases}, \quad (16)$$

donde $\delta\theta$ es el ángulo sólido exterior (en Ω^c) subtendido desde el punto x' . Cambiando la dirección de la normal, de modo que sea exterior a Ω , y notando con Γ el borde de Ω se obtiene finalmente:

$$c(x')\phi(x') = \int_{\Gamma} \psi(x, x')\frac{\partial\phi^e}{\partial n}(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi(x)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x, x') d\Gamma. \quad (17)$$

Esta ecuación integral puede resolverse en forma aproximada para una discretización de la superficie Γ , requiriendo que se satisfaga para cada punto x'_k en la malla de superficie (método de colocación). En lo que sigue se supondrá una discretización de la superficie en una malla de triángulos, y donde tanto el potencial como su derivada normal exterior se aproximan mediante funciones lineales continuas definidas sobre ella.

3.2. Elementos finitos

La formulación variacional para la ecuación 8 en la región ocupada por material ferromagnético Ω es bien conocida, y se reduce a buscar $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que se

satisfaga la siguiente ecuación para toda función de prueba $v \in H^1(\Omega)$:

$$-\int_{\Gamma} v \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma} v (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma. \quad (18)$$

La formulación de elementos finitos utilizada en este trabajo corresponde a la elección habitual de reemplazar el espacio H^1 por el espacio de dimensión finita compuesto por funciones lineales a trozos y continuas, definidas sobre una malla de tetraedros.

3.3. Acoplamiento BEM – FEM

En lo que sigue, discutiremos el acoplamiento entre las ecuaciones de los problemas interior y exterior, que permite por ejemplo eliminar completamente de la formulación las variables correspondientes al problema externo.

La componente normal de la inducción magnética B debe ser continua en las interfaces:

$$\mathbf{B}^i \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B}^e \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (19)$$

donde \mathbf{B}^i representa el campo en Ω y \mathbf{B}^e el campo en Ω^c . Como $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_c + \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{M})$, se tiene $(\tilde{\mathbf{H}}^i - \tilde{\mathbf{H}}^e) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Considerando que $\tilde{\mathbf{H}} = -\nabla \phi$, se obtiene la relación que vincula las derivadas normales del potencial escalar magnético a ambos lados de Γ :

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial n} - \frac{\partial \phi^e}{\partial n} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (20)$$

Eliminando la derivada normal exterior en la formulación de elementos de contorno 17, y denotando por simplicidad $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ a la derivada normal interior $\frac{\partial \phi^i}{\partial n}$, se obtiene:

$$\int_{\Gamma} \left\{ \psi(x, x') \frac{\partial \phi}{\partial n}(x) - \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, x') \right\} d\Gamma - c(x') \phi(x') = \int_{\Gamma} \psi(x, x') \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (21)$$

que juntamente con 18 constituyen finalmente el sistema de ecuaciones para resolver que depende sólo de las variables del problema interior.

3.4. Discretización e implementación

Como se mencionó anteriormente, se discretiza el dominio Ω utilizando una malla de tetraedros y la base habitual de funciones lineales a trozos y continuas $v_i(x)$ que valen 1 en el nodo x_i y cero en los demás. En esta base se escriben tanto el potencial como la derivada normal (que está soportada sólo en la superficie):

$$\frac{\partial \phi^h}{\partial n}(x') = \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i v_i(x'), \quad x' \in \Gamma, \quad \phi^h(x) = \sum_{i=1}^N \beta_i v_i(x) \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

siendo N el total de los nodos de la malla y N_s la cantidad de nodos en la superficie. Tenemos así un total de $N_s + N$ incógnitas $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_s}), (\beta_1, \dots, \beta_N)$. Reemplazando las expresiones 22 en 18, 21 y requiriendo que 21 se cumpla especializando x' en cada nodo de superficie y que 18 se satisfaga para todas las funciones de base v_k , obtiene el sistema de ecuaciones discreto:

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (23)$$

Este sistema de ecuaciones debe ser complementado con la especificación de la relación entre la magnetización \mathbf{M} y ϕ . En el caso de un material lineal de permeabilidad μ

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \mathbf{H} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} (\mathbf{H}_c - \nabla \phi), \quad (24)$$

mientras que si el material es no lineal

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}_c - \nabla \phi) \quad (25)$$

Si la relación entre \mathbf{M} y \mathbf{H} presenta histéresis el problema es más complejo aún, y \mathbf{M} dependerá no sólo del valor instantáneo de \mathbf{H} sino de su historia, por ejemplo, a través de un modelo de Preisach.⁽¹⁾ Así, la ecuación 23 puede ser un sistema no lineal que puede ser resuelto por métodos iterativos de punto fijo.

Observar sin embargo que los términos que contienen la magnetización \mathbf{M} participan sólo en el lado derecho de 18 y 21. Por lo tanto la matriz \mathbb{A} puede ser calculada una sola vez, y una vez determinada su descomposición LU , utilizada durante la iteración de punto fijo, como se observa en la figura 1. Además, considerando \mathbf{M} constante por elementos (lo que es consistente con suponer que el campo \mathbf{H} proviene del potencial lineal a trozos ϕ), es posible extraerla de las integrales del lado derecho de la discretización de las ecuaciones 18 y 21, por lo que estas integrales también se calculan una sola vez.

Una mención especial merecen los cálculos de las integrales de superficie que contienen a la función de Green $\psi(x_i, x_k)$, ya que son singulares cuando i y k coinciden, es decir, corresponden al mismo nodo. Alternativas habituales en la literatura⁽⁵⁾ son utilizar fórmulas de cuadratura gaussiana especiales, o conseguir expresiones analíticas adecuadas. Cuando $x_i \neq x_k$ se pueden usar reglas de cuadratura gaussiana de orden creciente a medida que $\|x_k - x_i\|$ disminuye.⁽⁴⁾ Para todos los casos considerados resultó sin embargo adecuado utilizar reglas de cuadratura adaptativas implementadas en la rutina TRIEX⁽⁸⁾ para FORTRAN.

Otro aspecto a considerar es el cálculo de $c(x'_k)$. Una estrategia habitual es utilizar el valor correspondiente a la geometría sin discretizar, es decir 2π si el borde es suave o, en general, el ángulo sólido subtendido exterior a Ω desde el nodo x'_k . Sin embargo en nuestros experimentos numéricos se observa que esta extrategia conduce a un orden de convergencia del potencial igual a 1 al refinar la malla, mientras que si se tiene en cuenta el ángulo sólido de la geometría discretizada se recupera la convergencia cuadrática a la solución del problema original. De hecho el ángulo

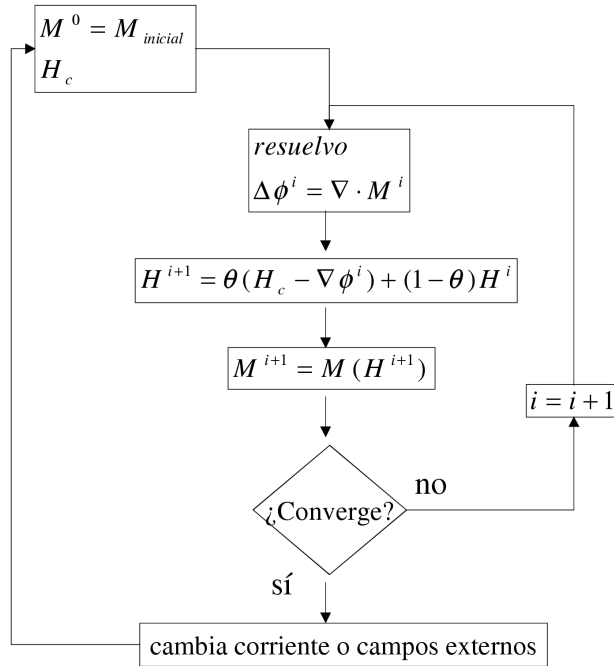


Figura 1: Esquema iterativo utilizado para resolver el sistema no lineal de ecuaciones.

sólido correspondiente a la discretización converge linealmente a su valor límite con el valor del tamaño h de la malla. Para calcular este ángulo, tengamos en cuenta que:

$$c(x') = \int_{\Omega^c} d\Omega = 4\pi - \int_{\Omega} d\Omega = 4\pi - \delta\theta(x'), \quad (26)$$

donde $\delta\theta$ puede calcularse como

$$\delta\theta = \int_{S \in \Omega} \nabla \frac{1}{\|x - x'\|} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (27)$$

donde la superficie de integración S consiste de las caras opuestas de los elementos que contienen al nodo en cuestión. Estas integrales pueden calcularse utilizando la misma rutina TRIEX.

Obsérvese además que la matriz \mathbb{A} resultante contiene bloques llenos, que corresponden al problema de elementos de borde, y bloques raros, dados por el problema de elementos finitos. En la figura 2 se muestra una malla de un tubo, y la estructura de la matriz asociada.

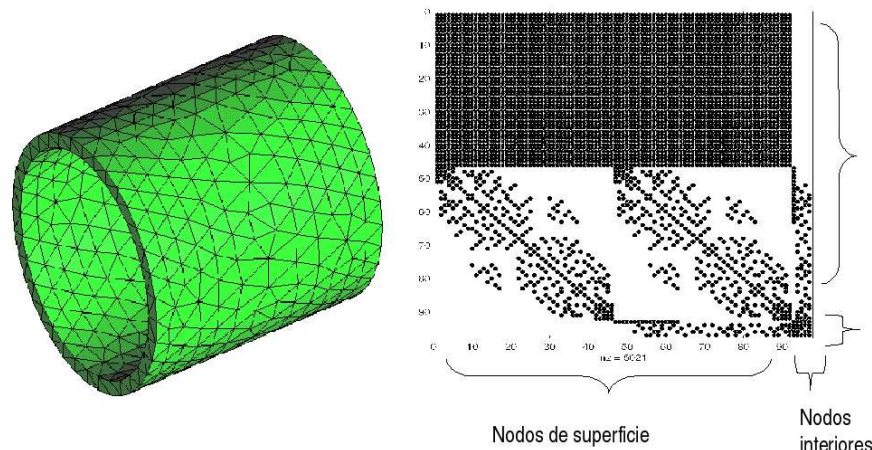


Figura 2: Malla de un tubo con tetraedros y estructura de la matriz del sistema asociado.

4. Resultados

En la figura 3 se muestra cómo es el campo expulsado cerca de un defecto externo, en una geometría similar a la de los equipos que detectan fisuras longitudinales. A la izquierda se observa el módulo de \mathbf{B} , mientras que a la derecha abajo se exhibe la geometría del dominio: un yugo circular con dos bobinas con núcleo ferromagnético adosadas, y unas piezas polares para adaptarse al radio exterior del tubo (centro). Estos resultados se obtuvieron para la formulación del potencial vector en 2D, mediante el uso del código adaptivo de multigrilla PLTMG. Observar la gran diferencia de escalas existente entre el dominio total (de diámetro superior al metro), el defecto (de ancho 1 mm), y el tamaño de la malla cerca de los ángulos del defecto.

Este nivel de detalle de las soluciones es muy difícil de lograr en 3D, aún con estrategias elaboradas de refinamiento. Para ejemplificar la aplicación del acoplamiento BEM-FEM, se muestra a continuación un problema mucho más idealizado: un anillo ferromagnético en presencia de una bobina por la que circula una corriente como se muestra en la figura 4 a). La corriente se incrementa en b), alcanza un máximo en c), y luego decrece en d) y finalmente llega a cero en e). Las figuras 4 b)-e) muestran la magnetización resultante utilizando como relación constitutiva un modelo de Preisach.⁽¹⁾ El caso e) corresponde a corriente cero, y por lo tanto muestra la magnetización residual. Este es un ejemplo preliminar del tipo de resultados que se puede obtener con el método numérico descrito. Corridas sistemáticas para algunos casos de interés, relacionados con la magnetización residual de aceros y con estrategias de desmagnetización están actualmente en desarrollo.

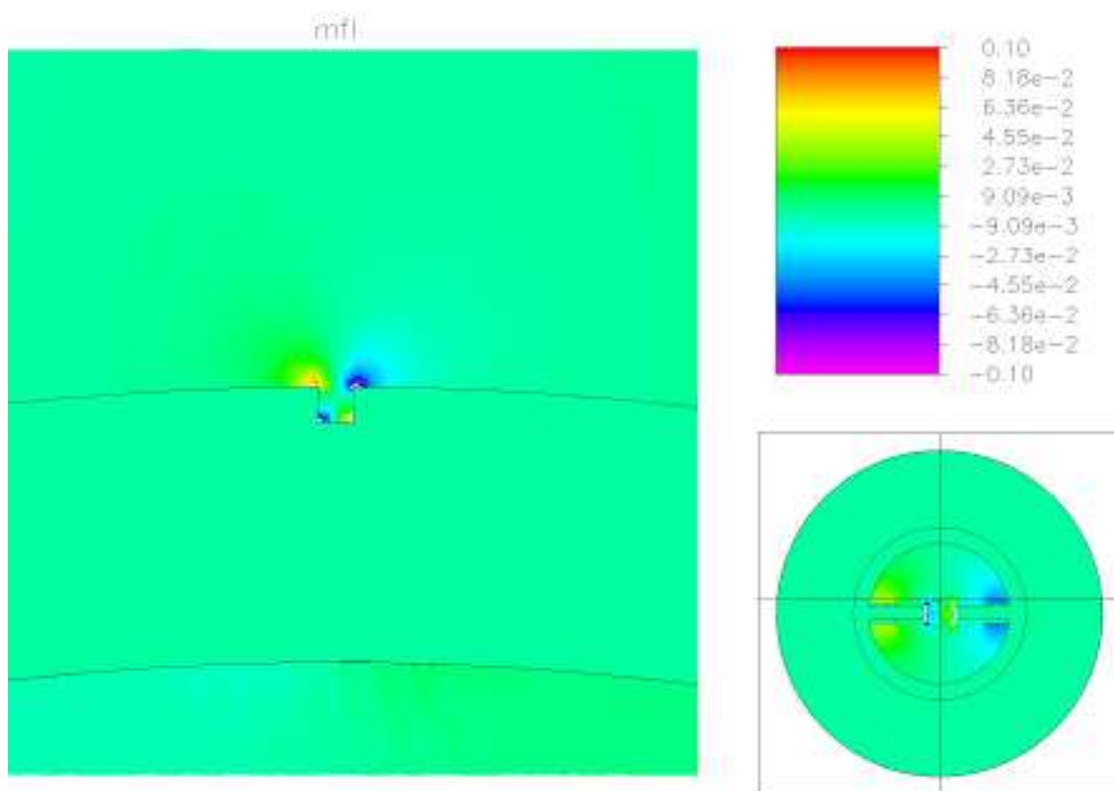


Figura 3: Distribución del módulo de la inducción magnética cerca de un defecto, en un equipo de detección de defectos longitudinales.

5. Conclusiones

Las herramientas desarrolladas permiten estudiar problemas electromagnéticos aún en presencia de materiales con histéresis. Para ello, se resuelven las ecuaciones de Maxwell en aproximación magnetostática, con una relación constitutiva general $\mathbf{M}(\mathbf{H})$. La implementación numérica en el caso 3D consiste en utilizar elementos finitos lineales en una malla de tetraedros para los medios materiales, en conjunto con el método de elementos de contorno para el aire. De este modo, se elimina la necesidad de discretizar el aire, y se satisfacen en forma automática las condiciones de contorno en el infinito. Además, la dimensión del sistema de ecuaciones resultante es mucho menor que la correspondiente a una discretización por elementos finitos que incluya el aire (si bien tiene bloques llenos). Por último, la formulación presenta ventajas a la hora de analizar desplazamientos relativos de los medios materiales.

El sistema no lineal de ecuaciones resultante se resuelve por métodos de tipo punto fijo. Las dificultades asociadas con la introducción de los elementos de contorno son principalmente el hecho de que las matrices resultantes tienen bloques llenos, y que las integrales singulares provenientes de la integración de la función de Green requieren técnicas especiales de aproximación.

Se muestran finalmente simulaciones que modelan en forma simplificada aplicaciones del método a problemas importantes de la industria siderúrgica, que serán desarrolladas exhaustivamente en el futuro. Esto posiblemente requiera refinar las técnicas utilizadas tanto para el llenado de la matriz como para la solución del sistema de ecuaciones, así como cambios en la formulación para incorporar la posibilidad de tener corrientes inducidas, y solucionar dificultades numéricas asociadas con los fuertes campos desmagnetizantes que aparecen para algunas geometrías.

Referencias

- (1) T. Guozden, J. Etcheverry, G. Sánchez. Modelos de Preisach para la descripción de histéresis en aceros. PANNDT 2007.
- (2) Francois Henrotte *et al.*, Modeling of ferromagnetic materials in 2D finite element problems using Preisach's model, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 28, No. 5, September 1992.
- (3) Julius Saitz; Magnetic Field Analysis of Induction Motors Combining Preisach Hysteresis Modeling and Finite Element Techniques, IEEE Transactions on Magnetics, Vol 37, No. 5, September 2001.
- (4) Claes G.L. Johnson, L. Ridgway Scott, An Analysis of Quadrature Errors in Second-Kind Boundary Integral Methods, 1989 Society fo Industrial and Applied Mathematics, Vol. 26, No. 6, pp. 1356-1382, December 1989.
- (5) C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag 1984.
- (6) K. Preis, I. Bardi, O. Biro, Numerical Analysis of 3D Magnetostatic Fields, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27 N° 5, september 1991.
- (7) R. E. Bank. PLTMG: A Software Package for Solving Elliptic Partial Differential Equations: Users' Guide 8.0, SIAM 1998.
- (8) Elise de Doncker, Ian Robinson. Algorithm 612 Triex: Integration Over a triangle using nonlinear extrapolation. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol 10, N. 1, Marzo 1984, pp. 17-22.

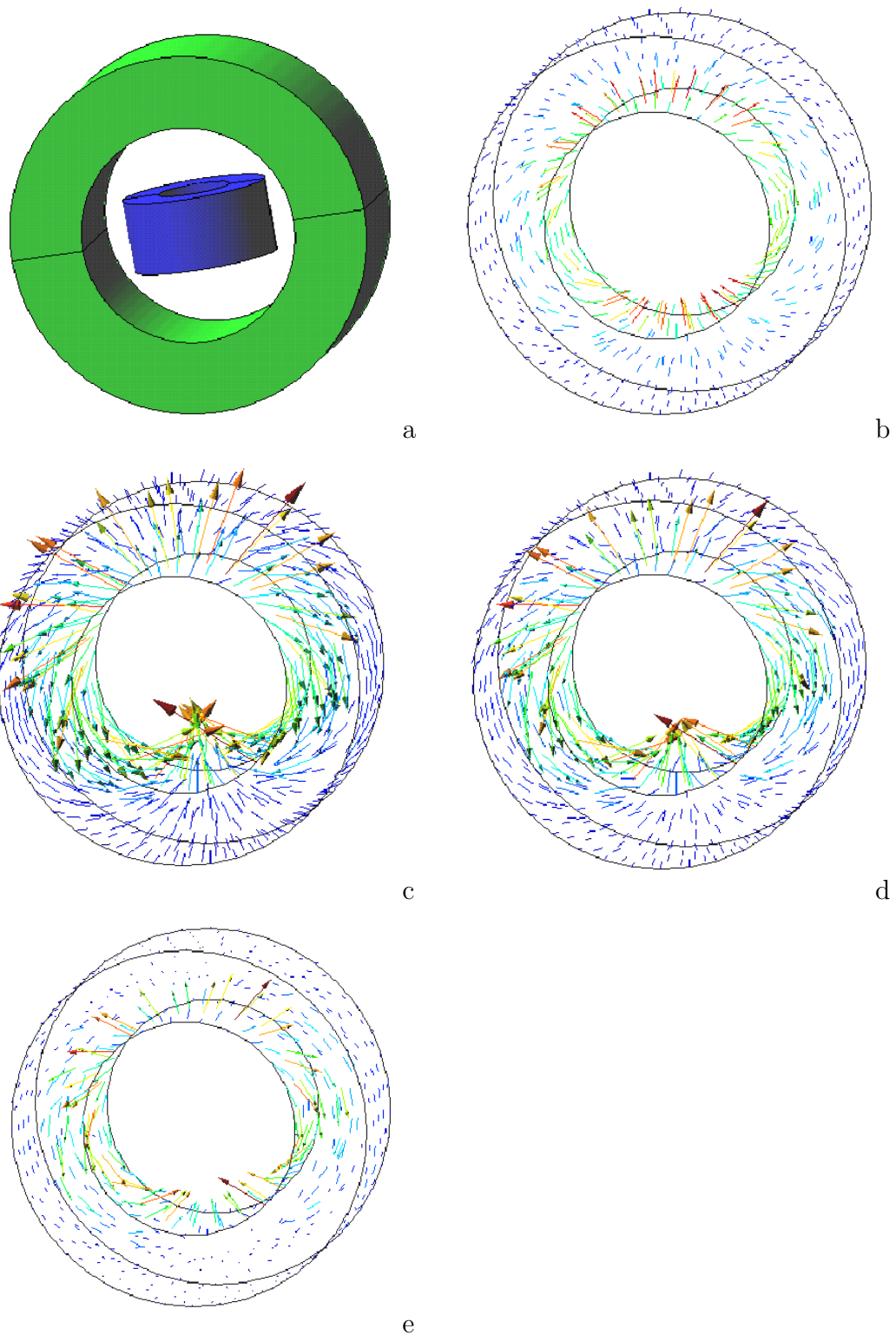


Figura 4: Anillo de material ferromagnético (verde) en presencia de una bobina (azul) por la que circula una corriente. a) geometría. b)-e) Magnetización para distintos valores de corriente. La corriente sube desde cero en b) alcanza el máximo en c), decrece en d) y se anula finalmente en e).