

Determinación de la fuerza axial en obenques considerando su rigidez flexional y una restricción rotacional elástica en sus apoyos

Marcelo A. Ceballos y Carlos A. Prato
Universidad Nacional de Córdoba, Departamento de Estructuras,
Av. Vélez Sarsfield 1611, X5016GCA Córdoba, Argentina
e-mail: mceballo@efn.uncor.edu

Resumen

Una estimación precisa de la fuerza axial en obenques resulta particularmente útil en la evaluación de la seguridad de los obenques de puentes existentes. Los cambios inesperados en sus frecuencias naturales encuentran su origen en la pérdida de rigidez axial asociada con la rotura de alambres de su sección transversal. El presente trabajo trata sobre la interpretación de ensayos de vibraciones libres realizados en obenques a fin de medir su fuerza axial con buena precisión aún cuando sus frecuencias naturales resulten significativamente afectadas por su rigidez flexional y una restricción rotacional elástica en sus apoyos.

La rigidez rotacional en los apoyos no puede determinarse con una exactitud adecuada de la secuencia de las frecuencias naturales identificadas en forma experimental debido a que este parámetro no afecta apreciablemente la progresión de sus valores. Las técnicas propuestas en este estudio permiten obtener aproximaciones de las rigideces rotacionales de los extremos que se ajustan iterativamente en función de los parámetros seleccionados para el proceso de optimización. Estos parámetros son precisamente la fuerza axial y la rigidez flexional del obenque que se ajustan en forma simultánea a través de la minimización de la diferencia entre las frecuencias naturales de un modelo analítico y los valores experimentales. Este enfoque resulta recomendable para evitar errores excesivos en la estimación de la fuerza axial en obenques cortos con valores de rigidez flexional relativamente altos tales como aquellos típicos en obenques de alambres paralelos embebidos en mortero cementicio muy utilizados para puentes atirantados hasta principios de los años 90's.

1. Introducción

La determinación de la fuerza axial actuante en obenques a través del análisis de registros de vibraciones libres se basa en la selección óptima de los parámetros de un modelo analítico de los obenques a los efectos de lograr la coincidencia entre la frecuencia fundamental medida, y eventualmente las frecuencias de modos superiores, y las frecuencias analíticas del obenque. Las herramientas básicas en este proceso son, por un lado, el modelo analítico del obenques y sus apoyos, y por otro lado, los registros experimentales de las vibraciones. Varios artículos técnicos han encarado este problema de diferentes formas dependiendo de la selección de los parámetros del modelo y del procedimiento experimental utilizado para la adquisición de los datos básicos. Entre ellos, Casas ⁽¹⁾ presenta una técnica experimental donde el modo fundamental de vibración del obenque se excita armónicamente en el plano vertical que lo contiene a

través de la oscilación de un peso suspendido en una frecuencia cercana a la fundamental. De esta forma, la respuesta del modo fundamental resulta dominante y la fuerza axial actuante en el obenque se deriva de la expresión de la frecuencia fundamental de una cuerda ideal, es decir, un obenque con rigidez flexional nula, sin flecha y con rigidez axial infinita. Los parámetros involucrados del modelo son: la masa por unidad de longitud, la longitud del obenque entre apoyos y la fuerza axial actuante. Casas propone un proceso de optimización para determinar la mejor estimación de la fuerza axial combinando datos provenientes de registros de vibraciones libres con datos de *strain-gauges* y mediciones directas de la fuerza axial obtenidas con gatos hidráulicos, a los efectos de contrarrestar las incertidumbres en la longitud libre del obenque debidas a los centradores y amortiguadores ubicados en las proximidades de los extremos. Las dificultades prácticas asociadas a este procedimiento combinado surgen por la necesidad de utilizar mediciones de deformaciones y fuerzas para complementar los registros de vibraciones.

Más recientemente Smith *et al.* ⁽²⁾⁻⁽³⁾ propone la utilización de registros de oscilaciones inducidas por viento y tránsito, adquiridos cerca de los extremos en el plano vertical que contiene los obenques, que resultan en general de mayor amplitud que las oscilaciones en la dirección normal a este plano. La frecuencia fundamental se obtiene a través de un promedio pesado de las diferencias entre las frecuencias de los modos superiores, y la fuerza axial se determina luego utilizando la expresión de una cuerda ideal.

Un trabajo más reciente de Geier *et al.* ⁽⁴⁾ propone el ajuste simultáneo de la frecuencia fundamental del obenque, considerado como una cuerda ideal, junto con la rigidez flexional que modifica el intervalo uniforme entre las sucesivas frecuencias naturales a través de un efecto de dispersión. El autor deriva la fuerza axial de la expresión de la frecuencia fundamental de una cuerda ideal, donde esta frecuencia se obtiene considerando de 20 a 25 frecuencias naturales identificadas de vibraciones inducidas por viento y tránsito en las proximidades de los extremos en el plano vertical que contiene el obenque. En esta técnica, Geier asume condiciones de borde bi-articulada o bi-empotrada imposibilitando de esta forma la adopción de valores intermedios para la restricción de los extremos. La rigidez rotacional de los extremos afecta en forma significativa el valor de la fuerza axial determinada a través de frecuencias experimentales; por lo tanto, la fuerza axial obtenida utilizando alguna de las condiciones extremas de apoyo podría desviarse apreciablemente de su verdadero valor dependiendo de la condición adoptada, en especial para obenques relativamente cortos con alta rigidez flexional típicos en obenques de alambres paralelos alojados en mortero cementicio dentro de tubos de polietileno muy utilizados hasta los años 90's en puentes atirantados. Los obenques originales de alambres paralelos de los puentes del Complejo Zárate – Brazo Largo descriptos en el trabajo de Prato *et al.* ⁽⁵⁾ presentan en la fuerza axial estimada una variación mayor al 10% dependiendo de la condición fija o libre adoptada para los extremos, lo que refleja la necesidad de considerar la rigidez rotacional efectiva de los extremos. Esta rigidez efectiva a la rotación depende de la rigidez flexional del obenque, la distancia entre los collares de los centradores de los anclajes y la rigidez del collar normal al eje del obenque.

Este trabajo presenta un procedimiento para obtener la fuerza axial de obenques a través del ajuste simultáneo de esta fuerza y la rigidez flexional utilizando 20~25 frecuencias naturales identificadas en forma experimental. Los registros de vibración se obtienen midiendo las aceleraciones horizontales de respuesta producidas por un pulso aplicado

manualmente en una sección próxima el extremo inferior del obenque a una distancia conocida de los apoyos. La excitación aplicada y la respuesta horizontal medida se consideran una alternativa óptima para reducir a un mínimo la influencia de la hipótesis de rigidez axial infinita del obenque en las frecuencias naturales del modelo analítico, y para limitar la contribución de vibraciones forzadas producidas por viento y tránsito en los resultados de los ensayos.

De acuerdo a lo mencionado previamente, la obtención de una exactitud mejorada en la fuerza axial requiere una estimación de la rigidez rotacional de los obenques en correspondencia con los apoyos. Sin embargo, esta tarea no puede llevarse a cabo solamente en base a los valores de las frecuencias naturales dado que su progresión no resulta sensible a esta rigidez rotacional. A los efectos de levantar esta limitación se proponen dos técnicas que encuentran aplicación de acuerdo a la configuración de los extremos del obenque. En el caso de obenques sin centradores ni apoyos intermedios puede recurrirse a información adicional relacionada con las formas modales en las proximidades de los extremos. La utilización de más de un acelerómetro con este propósito requeriría la adquisición de una mayor cantidad de datos durante los ensayos; sin embargo, la información buscada puede obtenerse de un único sensor identificando el primer modo para el cual el acelerómetro localizado a una distancia conocida del extremo del obenque presenta una mínima (o nula) amplitud espectral. Este dato resulta suficiente para definir el grado de empotramiento del obenque en el extremo. A los efectos de identificar esta frecuencia particular debería garantizarse que la fuerza impulsiva aplicada para efectuar los ensayos posea suficientes componentes en frecuencia en el rango apropiado. En el caso de obenques con centradores o apoyos intermedios pueden calcularse analítica e iterativamente los valores de la rigidez rotacional del obenque sobre los apoyos de acuerdo al número de modo y en función de la fuerza axial y la rigidez flexional obtenidas con hipótesis adecuadas de arranque. La longitud adoptada en el modelo analítico del obenque coincide con la distancia entre los apoyos: la validez del procedimiento de ajuste queda condicionada entonces a la rigidez transversal de los apoyos que para la mayoría de los dispositivos de anclaje de los obenques resulta suficientemente grande como para satisfacer este requisito.

2. Ecuación diferencial de un obenques con rigidez flexional

La ecuación diferencial de un obenque recto en vibraciones libres según Clough *et al.* ⁽⁶⁾ resulta

$$EI \cdot u^{iv}(x) y(t) - N \cdot u''(x) y(t) + m \cdot u(x) \ddot{y}(t) = 0 \quad (1)$$

donde

EI	es la rigidez flexional del obenque
N	es la fuerza axial del obenque (positiva en tracción)
m	es la masa por unidad de longitud del obenque

Las primas (') indican diferenciación respecto a la coordenada x y los puntos (¨) diferenciación respecto al tiempo t . Reemplazando $y(t) = e^{i\omega t}$ y simplificando se arriba a

$$EI \cdot u^{iv}(x) - N \cdot u''(x) - m\omega^2 \cdot u(x) = 0 \quad (2)$$

Las formas modales del obenque se obtienen de la solución de la ecuación (2) como

$$u(x) = D_1 \cdot \sin(\delta x) + D_2 \cdot \cos(\delta x) + D_3 \cdot \sinh(\varepsilon x) + D_4 \cdot \cosh(\varepsilon x) \quad (3)$$

donde

$$\delta = \sqrt{\sqrt{a^4 + g^4} + g^2} \quad \varepsilon = \sqrt{\sqrt{a^4 + g^4} - g^2} \quad (4)$$

$$a^4 = \frac{m\omega^2}{EI} \quad g^2 = -\frac{N}{2EI} \quad (5)$$

Una descripción adecuada de las condiciones de borde impuestas por los dispositivos de anclaje se obtiene a través de resortes rotacionales con constantes K_A y K_B actuando en los extremos del obenque. El grado de empotramiento en los apoyos puede representarse a través de parámetros adimensionales k_A y k_B definidos como

$$k_A = \frac{K_A L}{K_A L + \pi^4 EI} \quad \therefore \quad \frac{K_A}{EI} = \frac{\pi^4}{L} \frac{k_A}{(1-k_A)} \quad (6a)$$

$$k_B = \frac{K_B L}{K_B L + \pi^4 EI} \quad \therefore \quad \frac{K_B}{EI} = \frac{\pi^4}{L} \frac{k_B}{(1-k_B)} \quad (6b)$$

El factor π^4 que multiplica la rigidez flexional EI se define en forma arbitraria a los efectos de permitir una variación suave de las frecuencias naturales entre los valores extremos de los parámetros k_A y k_B (es decir, 0 a 1). Las condiciones de borde utilizadas para la obtención de las constantes D_1 a D_4 de (3) son

$$u_0 = 0 \quad \therefore \quad D_2 + D_4 = 0 \quad (7a)$$

$$u_L = 0 \quad \therefore \quad D_1 \cdot \sin(\delta L) + D_2 \cdot \cos(\delta L) + D_3 \cdot \sinh(\varepsilon L) + D_4 \cdot \cosh(\varepsilon L) = 0 \quad (7b)$$

$$K \cdot u'_0 = EI \cdot u''_0 \quad \therefore \quad \pi^4 k_A (\delta D_1 + \varepsilon D_3) + L(1-k_A)(\delta^2 D_2 - \varepsilon^2 D_4) = 0 \quad (7c)$$

$$K \cdot u'_L = -EI \cdot u''_L \quad \therefore \quad (7d)$$

$$\pi^4 k_B (\delta D_1 \cdot \cos(\delta L) - \delta D_2 \cdot \sin(\delta L) + \varepsilon D_3 \cdot \cosh(\varepsilon L) + \varepsilon D_4 \cdot \sinh(\varepsilon L)) + \dots$$

$$L(1-k_B)(-\delta^2 D_1 \cdot \sin(\delta L) - \delta^2 D_2 \cdot \cos(\delta L) + \varepsilon^2 D_3 \cdot \sinh(\varepsilon L) + \varepsilon^2 D_4 \cdot \cosh(\varepsilon L)) = 0$$

La ecuación característica cuyas raíces representan las frecuencias naturales del obenque se obtiene igualando a cero el determinante de la matriz de condiciones de borde

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sin(\delta L) & \pi^4 k_A \delta & \pi^4 k_B \delta \cdot \cos(\delta L) - L(1-k_B) \delta^2 \cdot \sin(\delta L) \\ 1 & \cos(\delta L) & L(1-k_A) \delta^2 & -\pi^4 k_B \delta \cdot \sin(\delta L) - L(1-k_B) \delta^2 \cdot \cos(\delta L) \\ 0 & \sinh(\varepsilon L) & \pi^4 k_A \varepsilon & \pi^4 k_B \varepsilon \cdot \cosh(\varepsilon L) + L(1-k_B) \varepsilon^2 \cdot \sinh(\varepsilon L) \\ 1 & \cosh(\varepsilon L) & -L(1-k_A) \varepsilon^2 & \pi^4 k_B \varepsilon \cdot \sinh(\varepsilon L) + L(1-k_B) \varepsilon^2 \cdot \cosh(\varepsilon L) \end{bmatrix} \\ \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

Desarrollando (8) y dividiendo por $\cosh(\varepsilon L)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
& 2\pi^8 k_A k_B \delta \varepsilon [\operatorname{sech}(\varepsilon L) - \cos(\delta L)] + \dots \\
& \left[L^2 (1 - k_A - k_B + k_A k_B) (\delta^2 + \varepsilon^2)^2 - \pi^8 k_A k_B (\delta^2 - \varepsilon^2) \right] \sin(\delta L) \cdot \tanh(\varepsilon L) + \dots \quad (9) \\
& \pi^4 L (k_A + k_B - 2k_A k_B) (\delta^2 + \varepsilon^2) [\varepsilon \cdot \sin(\delta L) - \delta \cdot \cos(\delta L) \cdot \tanh(\varepsilon L)] = 0
\end{aligned}$$

El parámetro εL satisface la siguiente condición

$$\varepsilon L \geq \sqrt{n^2 \pi^2 + 1/\beta^2} \quad (10)$$

donde

$$\beta = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{EI}{N}} \quad \text{es la forma adimensional de la rigidez flexional} \quad (11)$$

El parámetro β es la inversa de ζ definido en ⁽⁴⁾. Un análisis del límite inferior de εL en (10) que se alcanza para la condición bi-articulada ($k_A = k_B = 0$) demuestra que para valores típicos de rigidez flexional ($\beta < 0.030$) resulta conveniente asumir

$$\tanh(\varepsilon L) = 1 \quad \operatorname{sech}(\varepsilon L) = 0 \quad (12)$$

La ecuación (9) toma con estos valores la siguiente forma

$$\begin{aligned}
& \left[L^2 (1 - k_A - k_B + k_A k_B) (\delta^2 + \varepsilon^2)^2 - \pi^8 k_A k_B (\delta^2 - \varepsilon^2) \right] \sin(\delta L) - 2\pi^8 k_A k_B \delta \varepsilon \cdot \cos(\delta L) + \dots \\
& \pi^4 L (k_A + k_B - 2k_A k_B) (\delta^2 + \varepsilon^2) [\varepsilon \cdot \sin(\delta L) - \delta \cdot \cos(\delta L)] = 0 \quad (13)
\end{aligned}$$

Reagrupando se obtiene

$$A \cdot \sin(\delta L) + B \cdot \cos(\delta L) = 0 \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \pi^8 k_A k_B (\delta^2 - \varepsilon^2) - L^2 (1 - k_A - k_B + k_A k_B) (\delta^2 + \varepsilon^2)^2 - \pi^4 L (k_A + k_B - 2k_A k_B) (\delta^2 + \varepsilon^2) \varepsilon \\
B &= 2\pi^8 k_A k_B \delta \varepsilon + \pi^4 L (k_A + k_B - 2k_A k_B) (\delta^2 + \varepsilon^2) \delta \quad (15)
\end{aligned}$$

La ecuación (14) puede también expresarse como

$$\rho \cdot \sin(\delta L + \theta) = 0 \quad (16)$$

con

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \theta = \operatorname{atan}(B/A) \quad (17)$$

que se satisface para

$$\delta L + \theta = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (18)$$

El valor de la frecuencia natural ω puede despejarse del parámetro δ en (18) a través de las ecuaciones (4) y (5), ignorando que θ es también función de ω a través de δ y ε de acuerdo con las ecuaciones (17), (15), (4) y (5), y utilizando la siguiente fórmula de recurrencia de rápida convergencia

$$f_n = \frac{(n\pi - \theta_n)}{2\pi L} \sqrt{\frac{N}{m} \sqrt{1 + \beta^2 (n\pi - \theta_n)^2}} \quad \omega_n = 2\pi f_n \quad (19)$$

El parámetro θ_n se anula para la condición bi-articulada ($k_A = k_B = 0$) no resultando necesarias las iteraciones en este caso. El proceso iterativo para valores arbitrarios de k_A y k_B comienza con el cálculo de la frecuencia natural del modo n utilizando (19) con $\theta_n = 0$. El valor inicial de esta frecuencia permite calcular una primera aproximación de θ_n , que se utiliza luego para calcular nuevamente la frecuencia natural, completando así el ciclo de iteración que se repite hasta alcanzar la precisión deseada. La ecuación (19) conserva la exactitud aún para valores altos de rigidez flexional ($\beta \approx 0.03$) a diferencia de la expresión aproximada propuesta en ⁽⁴⁾ para frecuencias naturales de obenques con extremos bi-empotrados, que produce errores mayores al 10% en las frecuencias de modos de orden superior a 20 cuando la rigidez flexional adimensional resulta $\beta \geq 0.02$.

3. Ajuste simultáneo de la fuerza axial y la rigidez flexional

La minimización de la siguiente función error utilizando el criterio de mínimos cuadrados permite un ajuste que pondera adecuadamente un conjunto de 20~25 frecuencias naturales

$$\sum_n [\tilde{f}_n - f_n^2 / \tilde{f}_n]^2 = \text{mínimo} \quad (20)$$

donde

\tilde{f}_n son los valores experimentales de las frecuencias
 f_n son las frecuencias naturales del modelo analítico

Reemplazando la ecuación (19) en (20) y multiplicando por $(4\pi^2 mL^4)$ se obtiene

$$\sum_n [4\pi^2 mL^4 \tilde{f}_n - NL^2 (n\pi - \theta_n)^2 / \tilde{f}_n - EI (n\pi - \theta_n)^4 / \tilde{f}_n]^2 = \text{mínimo} \quad (21)$$

Las variables de minimización son la fuerza axial N y la rigidez flexional EI . Las constantes de los resortes rotacionales no se tratan como variables de minimización dado que la función error resulta insensible a estos valores. La Figura 1 presenta las frecuencias experimentales adimensionales \bar{f}_n para los valores indicados de β y para valores adoptados de $k = k_A = k_B$ de 0.0 / 0.2 / 0.4 / 0.6 / 0.8 / 1.0 (no indicados en la figura por razones de espacio) con

$$\bar{f}_n = \frac{f_n}{n \cdot f_1}$$

donde

f_1 es la frecuencia fundamental
 n es el orden del modo

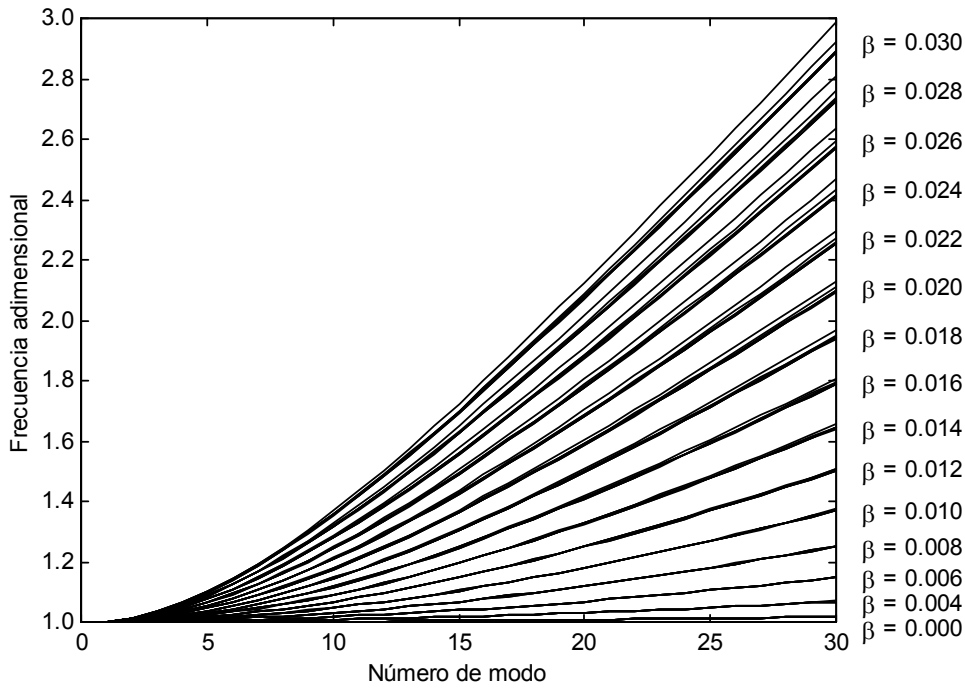


Figura 1. Progresión de frecuencias adimensionales de obenques

La influencia de k en la progresión de frecuencias naturales de acuerdo a la Figura 1 resulta sólo perceptible para valores relativamente altos de β . Por lo tanto, los valores de k_A y k_B deben determinarse en forma independiente al proceso de minimización como se indica en la siguiente sección.

El parámetro θ_n es función tanto de N como de EI aunque a los efectos del ajuste tal dependencia no se tiene en cuenta. Este artificio genera la necesidad de realizar iteraciones para corregir sucesivamente los valores de θ_n . Derivando (21) respecto a los parámetros de ajuste N y EI se arriba a

$$\sum_n \left[4\pi^2 mL^4 \tilde{f}_n - NL^2 (n\pi - \theta_n)^2 / \tilde{f}_n - EI (n\pi - \theta_n)^4 / \tilde{f}_n \right] (n\pi - \theta_n)^2 / \tilde{f}_n = 0$$

$$\sum_n \left[4\pi^2 mL^4 \tilde{f}_n - NL^2 (n\pi - \theta_n)^2 / \tilde{f}_n - EI (n\pi - \theta_n)^4 / \tilde{f}_n \right] (n\pi - \theta_n)^4 / \tilde{f}_n = 0 \quad (22)$$

o equivalentemente

$$NL^2 \sum_n (n\pi - \theta_n)^4 / \tilde{f}_n^2 + EI \sum_n (n\pi - \theta_n)^6 / \tilde{f}_n^2 = 4\pi^2 mL^4 \sum_n (n\pi - \theta_n)^2$$

$$NL^2 \sum_n (n\pi - \theta_n)^6 / \tilde{f}_n^2 + EI \sum_n (n\pi - \theta_n)^8 / \tilde{f}_n^2 = 4\pi^2 mL^4 \sum_n (n\pi - \theta_n)^4 \quad (23)$$

Despejando los parámetros de ajuste se obtiene

$$N = 4\pi^2 mL^2 \frac{\sum_n (n\pi - \theta_n)^6 / \tilde{f}_n^2 \cdot \sum_n (n\pi - \theta_n)^4 - \sum_n (n\pi - \theta_n)^8 / \tilde{f}_n^2 \cdot \sum_n (n\pi - \theta_n)^2}{\left(\sum_n (n\pi - \theta_n)^6 / \tilde{f}_n^2 \right)^2 - \sum_n (n\pi - \theta_n)^8 / \tilde{f}_n^2 \cdot \sum_n (n\pi - \theta_n)^4 / \tilde{f}_n^2} \quad (24)$$

$$EI = 4\pi^2 mL^4 \frac{\sum_n (n\pi - \theta_n)^6 / \tilde{f}_n^2 \cdot \sum_n (n\pi - \theta_n)^2 - \sum_n (n\pi - \theta_n)^4 / \tilde{f}_n^2 \cdot \sum_n (n\pi - \theta_n)^4}{\left(\sum_n (n\pi - \theta_n)^6 / \tilde{f}_n^2 \right)^2 - \sum_n (n\pi - \theta_n)^8 / \tilde{f}_n^2 \cdot \sum_n (n\pi - \theta_n)^4 / \tilde{f}_n^2} \quad (25)$$

La convergencia de las expresiones (24) y (25) es sumamente rápida mientras que las pérdidas de precisión resultan insignificantes.

4. Evaluación de la rigidez rotacional en los extremos del obenque

En esta sección se presentan dos técnicas para la evaluación de la rigidez rotacional que se aplican dependiendo de la configuración de los extremos del obenque. La primera técnica basada en información experimental se utiliza en el caso de obenques sin centradores ni amortiguadores cuyos extremos se encastran directamente en los anclajes. La segunda técnica que utiliza estimaciones analíticas de la rigidez rotacional encuentra aplicación en obenques que presentan dispositivos de anclajes con centradores que actúan como apoyos intermedios relativamente rígidos en la dirección normal al plano vertical que contiene al obenque.

4.1 Obenques sin apoyos intermedios

La aplicación de esta técnica presupone que ambos extremos del obenque poseen idéntica rigidez rotacional $k = k_A = k_B$. El parámetro k se determina identificando el orden del modo que presenta el nodo más cercano al anclaje inferior en correspondencia con la posición del sensor utilizado para registrar las señales experimentales. La Figura 2 muestra un espectro típico de la respuesta ante un ensayo impulsivo de un obenque de alambres paralelos utilizado en los puentes del Complejo Zárate – Brazo Largo ⁽⁵⁾. A los efectos de utilizar un espectro de un obenque con un valor conocido de rigidez rotacional en los extremos se genera el espectro analítico que se muestra en la Figura 3 para un sensor ubicado a una distancia del anclaje inferior del 5% respecto a la longitud total de un obenque con $\beta = 0.020$. El orden del modo con el nodo más cercano al anclaje en coincidencia con la posición del sensor resulta $n = 22$.

La localización del primer nodo depende del orden del modo, de la rigidez flexional y de la rigidez rotacional de ambos extremos. La cantidad de variables intervinientes impide la construcción de un gráfico único que permita la identificación de k por lo que debe construirse un gráfico para cada valor de β que se presente (que puede estimarse a tal efecto asumiendo la condición bi-articulada como primera aproximación para el obenque en cuestión). La Figura 4 muestra el gráfico correspondiente a $\beta = 0.020$ con los valores de k en función de la posición del sensor \bar{L} y del orden del primer modo con un nodo en coincidencia con la posición del sensor, donde

$$\bar{L} = n \frac{\Delta L}{L} \quad \Delta L \text{ es la distancia al anclaje inferior}$$

La Figura 3 proporciona un valor de $n = 22$ mientras que la Figura 4 con $\bar{L} = 0.05 \cdot n = 1.10$ arroja un valor de $k = 0.53$ que se encuentra suficientemente próximo al valor $k = 0.50$ utilizado en la generación de la Figura 3. Esta pequeña diferencia se debe a que el valor del orden del modo que debería utilizarse para la posición asignada

del sensor es $n = 21.85$ en lugar de 21 o 22. Esta técnica propuesta para la estimación de k resulta afortunadamente más exacta para valores crecientes de β que producen mayores diferencias en las estimaciones de la fuerza axial entre las condiciones límites de articulación y empotramiento de los extremos.

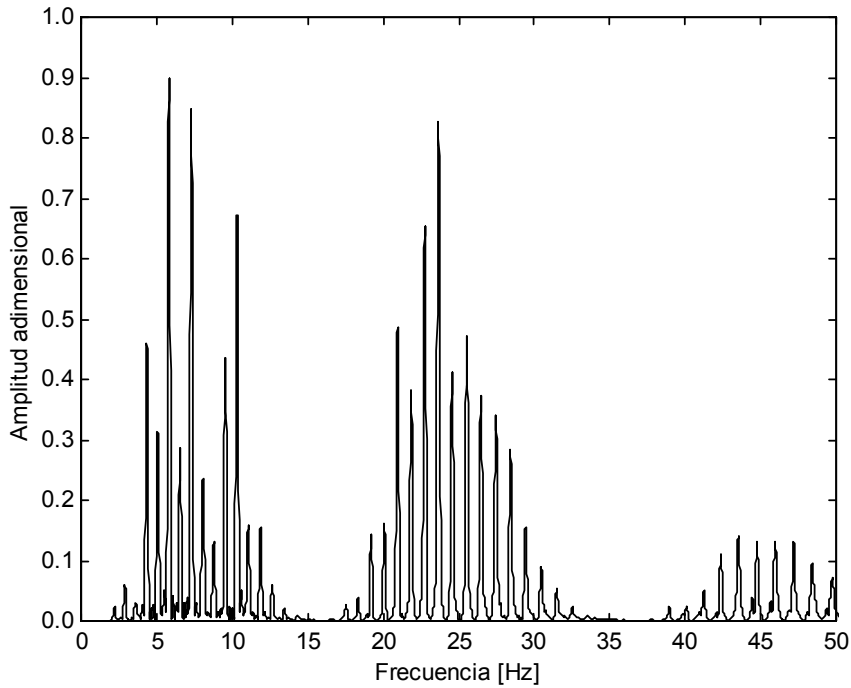


Figura 2. Espectro típico de aceleraciones de un obenque de Zárate – Brazo Largo

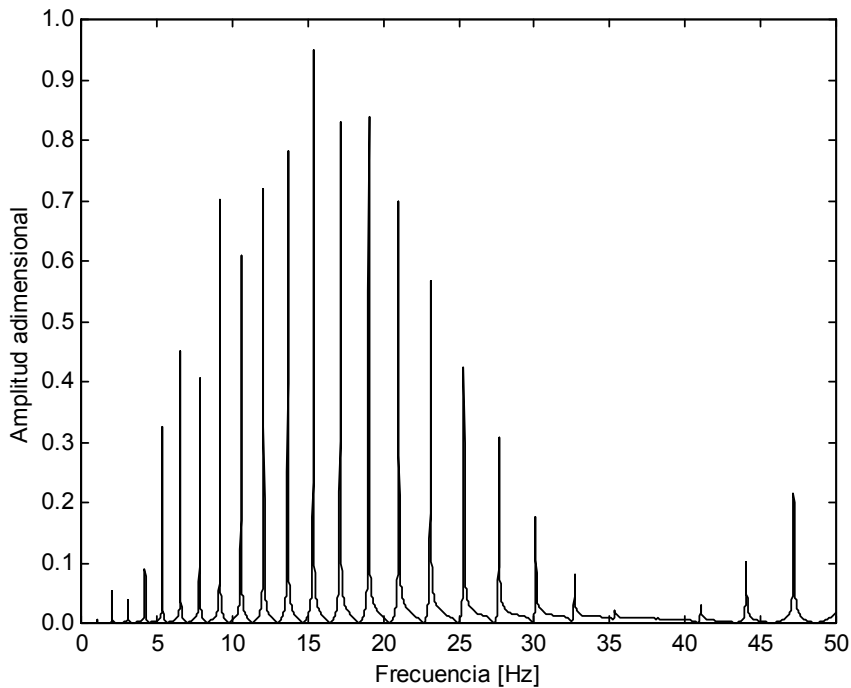


Figura 3. Espectro analítico de aceleraciones de un obenque con $\beta = 0.020$ y $k = 0.50$

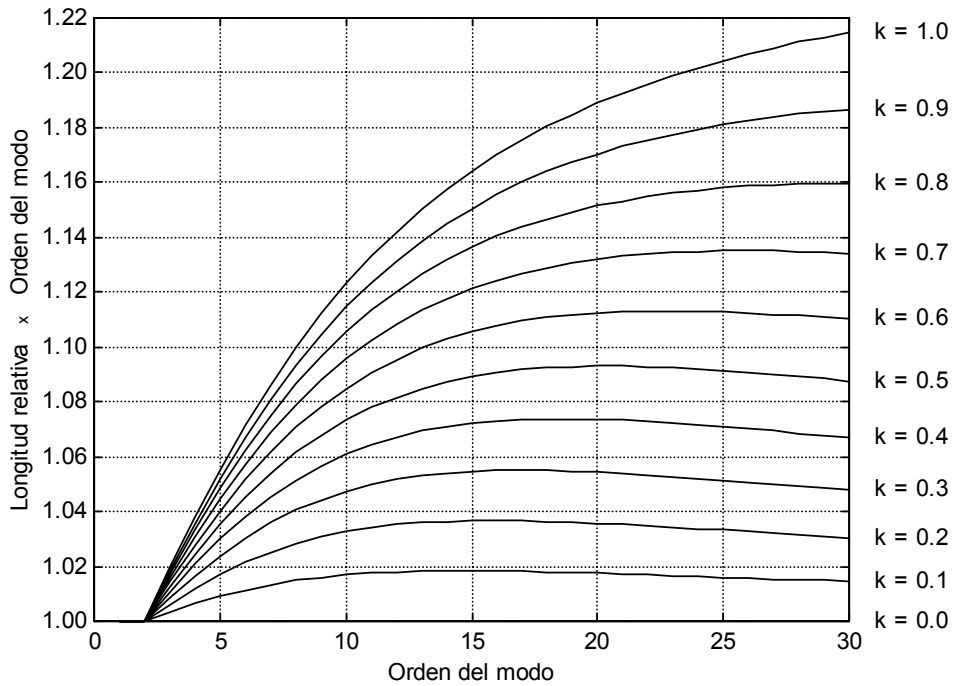


Figura 4. Posición del primer nodo en obenques con $\beta = 0.020$

4.2 Obenques con apoyos intermedios

Una configuración típica para un obenque indicada en la Figura 5 se compone de centradores a distancias L_A del anclaje inferior y L_B del anclaje superior, sin rigidez rotacional propia, que sólo impiden el desplazamiento transversal. La influencia sobre las frecuencias naturales del grado de empotramiento del obenque en los anclajes pierde relevancia a medida que aumentan las distancias L_A y L_B en relación a la longitud del obenque entre los centradores.

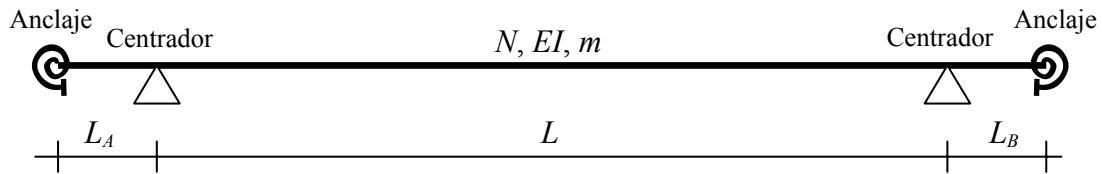


Figura 5. Modelo de un obenque con apoyos intermedios

La contribución de los tramos L_A y L_B en el comportamiento dinámico del obenque puede representarse sin pérdidas de precisión colocando resortes rotacionales con rigidez dinámica dependiente de la frecuencia en correspondencia con los centradores. Las condiciones de borde que permiten obtener las constantes D_1 a D_4 de la solución general en (3) para un tramo genérico de longitud L_0 considerado bi-articulado y con un giro unitario armónico sobre el centrador son

$$u_0 = 0 \quad \therefore \quad D_2 + D_4 = 0 \quad (26a)$$

$$u_{L_0} = 0 \quad \therefore \quad D_1 \cdot \sin(\delta L_0) + D_2 \cdot \cos(\delta L_0) + D_3 \cdot \sinh(\varepsilon L_0) + D_4 \cdot \cosh(\varepsilon L_0) = 0 \quad (26b)$$

$$u_0'' = 0 \quad \therefore \quad -\delta^2 D_2 + \varepsilon^2 D_4 = 0 \quad (26c)$$

$$u'_{L_0} = 1 \quad \therefore \quad \delta D_1 \cdot \cos(\delta L_0) - \delta D_2 \cdot \sin(\delta L_0) + \varepsilon D_3 \cdot \cosh(\varepsilon L_0) + \varepsilon D_4 \cdot \sinh(\varepsilon L_0) = 1 \quad (26d)$$

La rigidez dinámica del resorte rotacional resulta

$$K^0 = EI \cdot u''_L = EI \cdot \frac{\sin(\delta L_0) \cdot \tanh(\varepsilon L_0) \cdot (\delta^2 + \varepsilon^2)}{\varepsilon \cdot \sin(\delta L_0) - \delta \cdot \cos(\delta L_0) \cdot \tanh(\varepsilon L_0)} \quad (27)$$

La rigidez estática que podría utilizarse para modos relativamente bajos ($n \ll L/L_0$) surge del límite de la ecuación (27) para $\omega \rightarrow 0$:

$$K^0_{\omega \rightarrow 0} = \frac{N \cdot L_0}{(\coth(\alpha L_0) \cdot \alpha L_0 - 1)} \quad \alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (28)$$

Las condiciones de borde para un tramo genérico de longitud L_0 considerado empotrado-articulado son idénticas a (26) excepto:

$$u'_0 = 0 \quad \therefore \quad \delta D_1 + \varepsilon D_3 = 0 \quad (26c)$$

La rigidez dinámica del resorte rotacional resulta en este caso

$$K^1 = EI \cdot \frac{(\delta \cdot \cos(\delta L_0) \cdot \tanh(\varepsilon L_0) - \varepsilon \cdot \sin(\delta L_0)) \cdot (\delta^2 + \varepsilon^2)}{2 \cdot \delta \cdot \varepsilon \cdot (\cos(\delta L_0) - \operatorname{sech}(\varepsilon L_0)) + \sin(\delta L_0) \cdot \tanh(\varepsilon L_0) \cdot (\delta^2 - \varepsilon^2)} \quad (29)$$

La rigidez estática que podría utilizarse para modos relativamente bajos ($n \ll L/L_0$) surge del límite de la ecuación (29) para $\omega \rightarrow 0$:

$$K^1_{\omega \rightarrow 0} = \frac{N \cdot L_0 \cdot (\coth(\alpha L_0) \cdot \alpha L_0 - 1)}{\alpha^2 L_0^2 - 2 \cdot \alpha L_0 \cdot (\coth(\alpha L_0) - \operatorname{csch}(\alpha L_0))} \quad \alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (30)$$

El analista puede escoger de acuerdo a su criterio entre las expresiones (27) y (29) para definir la rigidez de los resortes rotacionales durante el proceso de ajuste considerando que los valores obtenidos resultan similares para distancias crecientes entre anclajes y centradores. La utilización de valores de rigidez rotacional variable con la frecuencia no presenta dificultades prácticas durante la aplicación de las fórmulas de recurrencia (24) y (25). La rigidez dinámica de estos resortes se anula para la frecuencia de resonancia del tramo L_0 tomando incluso valores negativos para frecuencias mayores. Dado que la rigidez varía rápidamente cerca de la resonancia se recomienda el ajuste de modos de orden bajo con frecuencias alejadas a esta resonancia para evitar la utilización de estimaciones de rigideces con errores importantes.

5. Comentarios finales

El trabajo de Geier *et al.* ⁽⁴⁾ presenta la siguiente expresión aproximada que proporciona una estimación de la diferencia en la fuerza axial del obenque entre las condiciones límites de articulación o empotramiento de los extremos

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\beta \quad (31)$$

La linealización que conlleva a la ecuación (31) es independiente del orden del modo, aunque esta expresión sólo resulta estrictamente aplicable para valores pequeños de β . A los efectos de extender la validez de dicha expresión hasta valores de $\beta \approx 0.030$, en el presente estudio se propone la siguiente expresión que se obtiene considerando el ajuste simultáneo de 20 modos con el criterio de minimización en (20) en una simulación numérica

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\beta + 1.5\beta^2 + 1800\beta^3 \quad (32)$$

Por ejemplo, la diferencia en la estimación de la fuerza axial en obenques tales como aquellos reportados en ⁽⁴⁾ con $\beta_{\max} \approx 0.010$ alcanza $\Delta N/N \approx 4\%$, mientras que en obenques de los puentes de Zarate – Brazo Largo con $\beta_{\max} \approx 0.025$ la diferencia alcanza $\Delta N/N \approx 12\%$.

Un aspecto no encontrado en la revisión de trabajos previos es la influencia de la flexibilidad cortante y la inercia rotacional en la progresión de las frecuencias naturales del obenque. El efecto de la rigidez flexional se manifiesta desde las primeras frecuencias naturales mientras que la flexibilidad cortante y la inercia rotacional tienen una influencia que se torna relevante para modos altos. Una alternativa conveniente para limitar la influencia de estos parámetros consiste en definir un número máximo de modos a considerar durante el proceso de ajuste. Este número máximo se obtiene incluyendo la flexibilidad cortante y la inercia rotacional en la ecuación diferencial como se indica en ⁽⁶⁾

$$EI \cdot u^{iv}(x)y(t) - N \cdot u''(x)y(t) + m \cdot u(x)\ddot{y}(t) - \dots$$

$$m \left(\frac{EI}{GA_c} + r^2 \right) u''(x)\ddot{y}(t) + \frac{m^2 r^2}{GA_c} u(x)\ddot{\ddot{y}}(t) = 0 \quad (33)$$

donde

GA_c es la rigidez cortante
 r es el radio de giro de la sección transversal

A los efectos de captar la influencia de estos parámetros sobre las frecuencias naturales sólo se trata la condición de borde bi-articulada de fácil resolución analítica. Las formas modales asociadas a un obenque bi-articulado resultan

$$u(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (34)$$

Reemplazando (34) en (33) y considerando $y(t) = e^{i\omega t}$ se arriba a

$$EI \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + N \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - m\omega^2 - m\omega^2 \left(\frac{EI}{GA_c} + r^2\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + m^2 \omega^4 \frac{r^2}{GA_c} = 0 \quad (35)$$

El último término de la ecuación (35) originado del acoplamiento de las deformaciones cortantes y la inercia rotacional sólo afecta modos relativamente altos donde la influencia de los términos directos ya es preponderante. Las frecuencias naturales despreciando entonces este término se obtienen a través de la siguiente expresión

$$\hat{f}_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{N}{m}} \sqrt{\frac{1 + \beta^2 n^2 \pi^2}{1 + \left(\frac{EI}{GA_c L^2} + \frac{r^2}{L^2} \right) n^2 \pi^2}} \quad \hat{\omega}_n = 2\pi \hat{f}_n \quad (36)$$

Considerando obenques de acero con sección transversal circular llena se obtiene

$$\begin{aligned} E &= 2.6G \\ A_c &= 0.9A \end{aligned} \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (37)$$

y por lo tanto

$$\left(\frac{EI}{GA_c L^2} + \frac{r^2}{L^2} \right) \approx \frac{4}{\lambda^2} \quad \lambda = \frac{L}{r} \quad (38)$$

La ecuación (36) toma entonces la siguiente forma

$$\hat{f}_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{N}{m}} \sqrt{\frac{1 + \beta^2 n^2 \pi^2}{1 + 4\pi^2 n^2 / \lambda^2}} \quad (39)$$

El denominador de la última raíz en (39) representa el efecto de las deformaciones cortantes y la inercia rotacional que se torna más significativo a medida que aumenta el orden del modo n y disminuye la esbeltez λ . En caso de aceptarse, por ejemplo, un límite de error del 1‰ en la estimación de las frecuencias naturales debido a este efecto se obtiene

$$\begin{aligned} (f_n - \hat{f}_n) / \hat{f}_n &\leq 0.001 \\ \sqrt{1 + 4\pi^2 n^2 / \lambda^2} - 1 &\leq 0.001 \\ n &\leq 0.00712 \lambda \end{aligned} \quad (40)$$

Desde el punto de vista práctico no resulta conveniente tomar más de 25 o 30 modos. La ecuación (40) proporciona luego el número máximo de modos que deberían considerarse en el análisis de los resultados experimentales para mantener la influencia de las deformaciones cortantes y la inercia rotacional dentro de un 1‰. Los obenques pertenecientes al Danube Channel Bridge ⁽⁴⁾ presentan valores de esbeltez del orden de $\lambda \approx 3000$ ($n \leq 20$). Por otra parte, la esbeltez máxima de los obenques de los puentes del Complejo Zárate – Brazo Largo ⁽⁵⁾ es $\lambda_{\max} \approx 7000$ ($n \leq 50$) mientras que la esbeltez mínima resulta $\lambda_{\min} \approx 1500$ ($n \leq 10$).

Casas ⁽¹⁾ sostiene que la definición de la longitud efectiva del obenque para el caso de dispositivos de anclajes complejos puede resultar un aspecto crítico durante la determinación de la fuerza axial. Geier *et al.* ⁽⁴⁾ propone medir la distancia entre nodos de modos altos cerca de los apoyos para calcular luego la longitud efectiva como el producto de esta distancia por el orden del modo correspondiente. En el caso de obenques con apoyos intermedios relativamente flexibles quizás sólo resulte posible la obtención de buena precisión en la estimación de la fuerza axial aplicando técnicas de ajuste derivadas del análisis modal experimental en base a modelos numéricos con diferentes resortes rotacionales y traslacionales.

6. Conclusiones

El procedimiento presentado para la evaluación de los resultados experimentales de ensayos vibratorios sobre obenques de puentes atirantados permite una determinación precisa de la fuerza axial de obenques con rigidez flexional teniendo en cuenta la influencia del grado de empotramiento en los apoyos. Las técnicas propuestas en otros trabajos que no consideran la rigidez rotacional sobre los apoyos presentan un potencial error en la determinación de la fuerza axial entre valores extremos de esta rigidez rotacional que puede superar el 10% para obenques de corta longitud con alta rigidez flexional.

Los parámetros adimensionales definidos en este trabajo permiten captar adecuadamente las variaciones de los parámetros modales en función de las propiedades geométricas y mecánicas de los obenques. Por otra parte, las expresiones de recurrencia propuestas arrojan valores precisos de las frecuencias naturales de obenques con rigidez flexional utilizando un número mínimo de iteraciones que no dificultan la automatización del proceso de ajuste.

Agradecimientos

El presente estudio forma parte de las actividades del proyecto PID N° 12-12821 de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica. Las mediciones en los puentes del Complejo Zarate – Brazo Largo fueron posibles por un convenio entre la Universidad Nacional de Córdoba y la Dirección Nacional de Vialidad.

Referencias

1. Casas, J. R., *A Combined Method for Measuring Cable Forces: The Cable-stayed Alamillo Bridge, Spain*, Structural Engineering International, Vol. 4, N° 4, pp. 235-240, 1994.
2. Smith, S. W. and Johnson, M., *Field Test to Determine Frequencies of Bridge Stay Cables*, Proceedings of the XVII International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida, pp. 745-751, 1999.
3. Smith, S. W. and Campbell, J. E., *Testing and Model Verification of the Maysville Kentucky Bridge Stay Cables*, Proceedings of the XX International Modal Analysis Conference, Los Angeles, California, pp. 1050-1056, 2002.
4. Geier, R., De Roeck, G. and Petz, J., *Cable Force Determination for the Danube Channel Bridge in Vienna*, Structural Engineering International, Vol. 15, N° 3, pp. 181-185, 2005.
5. Prato, C.A., Ceballos, M.A., Huerta, P.J.F., Gerbaudo, C.F., Grünbaum, C.E. and Hommel, D.L., *Diagnosis, Construction Procedures and Design Recommendations for Replacement of Cables in Cable-Stayed Bridges: Experience from two current cases in Argentina*, US-Canada-Europe Workshop on Bridge Engineering: Recent Advances in Bridge Engineering, Zurich, Suiza, 1997.
6. Clough, R.W. and Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Inc., New Jersey, 1994.