

Analyse Du Tenseur De Christoffel Généralisé En Acoustoélasticité

Hassiba KETATA ¹, Yassine WALI ², Mohamed Hédi BEN GHOZLEN ³.

Laboratoire Physique des Matériaux. Faculté des Sciences de Sfax 3018 Sfax. Tunisie Fax : 216 74 676 607.

¹Ecole Préparatoire aux académies Militaires à Sfax Tunisie, Email: hassiba.ketata@yahoo.fr.

²Institut Préparatoire aux Ecoles d'Ingénieurs de Sfax Tunisie

³Faculté Des Sciences de Sfax Tunisie

Abstract

In practical materials are prestressed with action of applied or residual initial stress. The existing theory of acoustoelasticity allows establishing the generalized Christoffel equation, its numeric resolution permits to carry out acoustoelastic effects on wave propagation. The analytical effects of static stresses can be subdivided in two kinds, first anisotropic effects related to new fourth rank elastic constants and secondly additional stresses appearing on the diagonal of generalized Christoffel tensor. We demonstrated that for particular propagation directions additional stresses are suppressed, so the generalized Christoffel tensor can be written exclusively in term of new fourth rank elastic constants. Consequently stressed medium can be considered as a new material, which has an elastic behaviour dependent on efficient stiffness tensor. The measurement of waves ultrasonic speeds according to these particular directions permits to determine efficient constants from which hyper elastic constants are deduced.

Résumé

En pratique les matériaux utilisés sont soumis à l'action de contraintes statiques appliquées ou résiduelles. La théorie de l'acoustoélasticité permet d'établir l'équation de Christoffel généralisée, sa résolution numérique permet de déterminer l'effet de la contrainte sur les vitesses de l'onde ultrasonore. L'effet de la contrainte statique peut être subdivisé analytiquement en deux termes, un terme agissant sur l'anisotropie par l'intermédiaire des constantes élastiques effectives et un terme directement lié à la contrainte par la présence de ses composantes sur la diagonale du tenseur de Christoffel généralisé. Nous montrons que pour des directions de propagation particulières le terme de contribution directe de la contrainte est nul. Le milieu soumis à la contrainte se comporte alors comme un milieu équivalent de constantes élastiques les constantes effectives. La mesure des vitesses suivant ces directions particulières permet de déterminer les constantes effectives et par la suite les constantes hyper élastiques du matériau.

1. Introduction

La caractérisation de l'état de contrainte résiduelle par les méthodes ultrasonores présente de nombreux avantages: elle est facile à mettre en œuvre, non destructive et offre de nombreuses possibilités pour estimer les valeurs des contraintes dans le matériau [1,2]. Cette méthode est basée sur la théorie de l'acoustoélasticité [3,4], il s'agit de développer la théorie de l'élasticité à un ordre supérieur à un et d'établir l'équation de Christoffel généralisée dont la résolution permet de décrire la propagation des ultrasons dans les matériaux soumis à des contraintes statiques. Les vitesses des ondes ultrasonores et leurs polarisations sont respectivement les valeurs et les vecteurs propres du tenseur de Christoffel généralisé. Ce dernier s'exprime en fonction des constantes élastiques effectives, qui sont fonction des constantes élastiques du deuxième du troisième ordre et de la déformation statique, et des termes du tenseur de la contrainte statique.

Dans le présent travail on s'intéresse à la comparaison des contributions des deux termes du tenseur de Christoffel généralisé, le terme directement lié à la contrainte statique et celui faisant intervenir l'anisotropie par l'intermédiaire des constantes effectives. Les vitesses de phases et d'énergie dans le matériau soumis à la contrainte sont calculées de deux manières, un calcul exact (V^{ex}) utilisant le tenseur de Christoffel généralisé global et un calcul approché (V^{ap}) en négligeant le terme directement lié à la contrainte. Nous remarquons que dans des plans de symétrie et pour des directions particulières, les calculs approché et exact donnent le

même résultat. Ainsi pour ces cas particuliers le tenseur de Christoffel généralisé s'identifie à celui d'un matériau de constantes élastiques égales aux constantes effectives. Ces mêmes constantes caractérisent l'anisotropie introduite par la contrainte résiduelle ou appliquée. La mesure des vitesses le long de ces directions permet par les procédures classiques de remonter aux constantes effectives. La théorie de l'acoustoélasticité établit les liens entre les constantes élastiques effectives, les constantes élastiques à l'état naturel et les constantes hyper élastiques. Ceci offre une voix nouvelle permettant l'accès aux constantes hyper élastiques, celles traduisant le comportement non linéaire à l'état naturel, dont la mesure est difficile et de faible précision [5].

Le présent travail s'appuyant sur les directions là où l'effet directement lié à la contrainte statique est négligeable, apporte une procédure simple conduisant aux constantes hyper élastiques de matériaux de symétrie cubique.

La présente approche a l'avantage d'être plus simple et plus rapide en comparaison avec d'autres méthodes proposées par Duquenois [5] et Gary G [6]. Dans ces travaux la détermination des constantes hyper élastiques s'obtient à partir des coefficients acoustoélastiques le long des directions de haute symétrie.

Le paragraphe 2 est consacré aux résultats de la théorie d'acoustoélasticité, on montrera que le tenseur de Christoffel généralisé se scinde en deux tenseurs. Le premier dépendant uniquement des constantes effectives, traduit la nouvelle anisotropie du matériau. Le second relatif à la contrainte statique est diagonal, et il s'annule pour des directions de propagation normales à cette contrainte. Le paragraphe 3 illustre la contribution de chaque terme à l'effet acoustoélastique et la méthode permettant de déterminer les constantes hyper élastiques d'un matériau cubique, deux matériaux d'anisotropie différente sont retenus pour cette illustration à savoir Al et Si.

2. Base théorique :

Le lien entre la contrainte et la déformation s'obtient par un développement de Taylor poussé au delà des termes linéaires [3,4,7]. L'application adéquate de la relation fondamentale de la dynamique et l'adoption de la solution onde plane conduit à une équation aux valeurs propres:

$$[G_{jk} - \rho V^2 \delta_{jk}] P_k = 0 \quad (1)$$

avec :

\vec{P} le vecteur déplacement unitaire, V la vitesse de phase de l'onde acoustique, ρ la masse volumique du matériau et G_{jk} le tenseur de Christoffel généralisé qui est donné par :

$$G_{jk} = (C_{ijkl} + \sigma_{il}^0 \delta_{jk}) n_i n_l \quad (2)$$

Où \vec{n} le vecteur unitaire de la direction de propagation, σ_{il}^0 tenseur de contrainte statique résiduelle ou appliquée et les constantes élastiques C_{ijkl} sont les constantes effectives données par l'expression [8,9] :

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 (1 - \varepsilon_{pp}) + C_{mjkl}^0 \varepsilon_{im} + C_{inlk}^0 \varepsilon_{jn} + C_{ijpl}^0 \varepsilon_{kp} + C_{ijkq}^0 \varepsilon_{lq} + c_{ijklrs} \varepsilon_{rs} \quad (3)$$

Où C_{ijkl}^0 sont les constantes élastiques du deuxième ordre, c_{ijklrs} les constantes élastiques du troisième ordre (ou hyper élastiques) du matériau à l'état naturel et ε_{ij} les termes du tenseur de déformation dû à la contrainte statique.

Sous l'action de la contrainte le matériau change de symétrie, les constantes élastiques effectives traduisent les caractéristiques de la nouvelle symétrie. La résolution de l'équation aux valeurs propres de Christoffel généralisé (eq1) fait intervenir ces constantes élastiques effectives et leur nouvelle anisotropie. Les termes du tenseur de contrainte statique ne sont présents que sur la diagonale de la matrice G, le tenseur de Christoffel demeure donc toujours symétrique. Ainsi pour chaque direction de propagation \vec{n} et pour une contrainte statique donnée les vitesses de phase V_{ph} et les polarisations \vec{P} , sont déduites respectivement des valeurs propres (ρV^2) et des vecteurs propres de la matrice G. Ces vitesses sont alors fonction des constantes effectives et du tenseur de contrainte statique. Alors que V_{ph} est obtenue suite à une opération de diagonalisation de la matrice G, la vitesse de groupe V_g peut être présentée analytiquement sous forme d'une somme faisant intervenir de manière séparée la contrainte statique. La réécriture de l'équation (2) et l'introduction du vecteur d'onde \vec{K} donne :

$$C_{ijkl} K_i K_l P_k + \sigma_{il}^0 \delta_{jk} K_i K_l P_j = \rho \omega^2 P_j. \quad (4)$$

En multipliant les deux termes de l'équation par P_j et en utilisant la relation : $P_j P_j = 1$, on obtient :

$$C_{ijkl} K_i K_l P_k P_j + \sigma_{il}^0 \delta_{jk} K_i K_l = \rho \omega^2 \quad (5)$$

Après différentiation de l'équation (5) par rapport à chacune des composantes du vecteur d'onde nous avons :

$$C_{ijkl} P_j P_k K_l + \sigma_{il}^0 \delta_{jk} K_l = \rho \omega \frac{\partial \omega}{\partial K_i} \quad (6)$$

La composante i de la vitesse de groupe dans le milieu contraint s'écrit :

$$V_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial K_i} = \frac{1}{\rho \omega} (C_{ijkl} P_j P_k + \sigma_{il}^0 \delta_{jk}) K_l = \frac{1}{\rho V_{ph}} (C_{ijkl} P_j P_k + \sigma_{il}^0 \delta_{jk}) n_l \quad (7)$$

Ainsi les composantes de V_g dans le matériau soumis à la contrainte sont fonction de la vitesse de phase, des constantes élastiques effectives au lieu des constantes élastiques du matériau à l'état naturel [8] et présentent un terme additionnel $\sigma_{il}^0 n_l$.

De la même manière le tenseur de Christoffel généralisé peut être présenté par la somme de deux termes :

$$G_{jk} = G_{jk}(an) + G_{jk}(\sigma^0)$$

où : $G_{jk}(an) = C_{ijkl} n_i n_l$ représente le terme lié à l'anisotropie (de la nouvelle symétrie du milieu) et $G_{jk}(\sigma^0) = \sigma_{il}^0 n_i n_l \delta_{jk}$ le terme additionnel directement lié à la contrainte statique

résiduelle ou appliquée. Pour certaines orientations le terme $G_{jk}(\sigma^0)$ s'annule, dans ces conditions l'effet acoustoélastique est entièrement traduit par le tenseur effectif de rigidité. La détermination des vitesses de phases se ramène à la résolution de l'équation aux valeurs propres : $[C_{ijkl} n_i n_l - \rho V^2 \delta_{jk}] P_k = 0$ qui a la même forme que l'équation de Christoffel dans un milieu à l'état naturel exempt de toute contrainte statique. Dans un travail récent de Rokhlin et al [9] le terme additionnel, auquel on attribue un poids inférieur à dix pour cent, est négligé, en fait le poids de ce terme est fonction de l'orientation du matériau. L'absence de ce terme rend l'obtention des constantes effectives de rigidité possible à partir d'une collecte de vitesse de phase par les méthodes classiques d'inversion[8].

Dans le présent travail on s'intéresse à des matériaux cubiques subissant soit une contrainte de compression axiale (σ_{33}^0) soit une contrainte $\Sigma^0(\Omega)$ appliquée dans le plan (001) faisant

un angle Ω avec l'axe [100] qui fait intervenir σ_{11}^0 , σ_{22}^0 et un terme de cisaillement σ_{12}^0 [7]. Dans le premier cas le matériau est ramené à la symétrie quadratique caractérisée par six constantes élastiques (C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} , C_{44} , C_{66}), alors que pour la contrainte de cisaillement la nouvelle symétrie est monoclinique caractérisée par huit constantes élastiques (C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} , C_{44} , C_{45} , C_{56} , C_{66}), ces constantes sont les constantes effectives du matériau soumis à la contrainte statique.

3. Résultats et discussions :

L'illustration est réalisée sur deux matériaux d'anisotropie différente à savoir le silicium et l'aluminium. On définit deux vitesses de phase obtenues à partir de l'équation aux valeurs propres de Christoffel ; la première est désignée par V_e (vitesse exacte) car le terme additionnel de la contrainte statique est maintenu dans l'équation (2), la seconde vitesse est appelée V_a (vitesse approchée) obtenue sans le terme additionnel. Les calculs effectués sur ces deux paramètres révèlent que dans les plans perpendiculaires à la contrainte statique $V_e = V_a$. Dans ces conditions l'équation de Christoffel généralisée s'écrit exclusivement en fonction des termes du tenseur effectif de rigidité : $G_{jk} = G_{jk}(an)$. Dans le cas de la contrainte axiale,

l'égalité des vitesses V_e et V_a est obtenue pour les directions $\vec{n} = [n_1, n_2, 0]$ du plan (001), alors que si la contrainte est de cisaillement $V_e = V_a$ dans le plan de normale $[\cos \Omega, \sin \Omega, 0]$.

Les effets acoustoélastiques se représentent habituellement par les coefficients

acoustoélastiques définis par $A_{ij} = \frac{V_{ij} - V_{ij}^0}{V_{ij}^0 \cdot \sigma^0}$, où V_{ij} et V_{ij}^0 sont respectivement les vitesses de

phase dans le matériau soumis à la contrainte (état initial) et dans le matériau sans la contrainte (état naturel). Ces coefficients A_{ij} sont calculés et représentés en fonction d'un angle de balayage ψ dans les plans de haute symétrie des matériaux cubiques. Le calcul avec et sans le terme additionnel donne A_{ij_e} (coefficient acoustoélastique exacte) et A_{ij_a} (coefficient acoustoélastique approché). Dans le cas de (σ_{33}^0), la figure1 reproduit les variations de ces coefficients dans les plans (100), (110) et (011), les valeurs obtenues sont du même ordre de grandeur que celles relevées dans la littérature [11]. L'absence du terme additionnel fait apparaître des coefficients approchés supérieur ou égal aux coefficients exacts. Les écarts s'amenuisent en s'éloignant de la direction de la contrainte et s'accroissent en s'y rapprochant. Ces écarts représentés en pourcentage sur la figure2 varient de 0 à 45% pour Si et de 0 à 20% pour Al. L'égalité ($A_{ij_e} = A_{ij_a}$) est obtenue pour les directions normales à la contrainte statique et les écarts importants apparaissent le long de la contrainte. La figure3 montre l'égalité des coefficients A_{ij_e} et A_{ij_a} dans les plans perpendiculaires à la contrainte, pour la contrainte axiale l'effet acoustoélastique est symétrique par rapport à la direction [110] du plan (001), ce qui n'est plus le cas pour la contrainte de cisaillement ($\Omega = 45$) car l'effet acoustoélastique est décrit dans le plan (110).

Ces résultats permettent de conclure que le terme directement lié à la contrainte ne contribue pas à l'expression de la vitesse si la direction de propagation de l'onde est perpendiculaire à la direction de la contrainte statique et donc il peut être négligé uniquement dans le voisinage de ces directions. Les vitesses de phase dans ces conditions, sont exprimées exclusivement en fonction des constantes effectives rendues accessibles par les méthodes classiques d'inversion, les relations sont présentées en annexe I.

La connaissance des constantes effectives permet, à partir des constantes élastiques naturelles C_{ij}^0 et les termes du tenseur de déformation ϵ_{ij} associés à la contrainte statique, de remonter aux valeurs des six constantes hyper élastiques c_{ijk} du matériau cubique [11]. Les relations

entre ces paramètres sont données à l'annexe II. Il en ressort que la détermination des constantes hyper élastiques c_{111} , c_{112} , c_{123} , c_{144} et c_{155} nécessite la mesure des vitesses V_{11} , V_{12} , V_{13} , $V_{[110]L}$ et V_{33} , là où la contrainte appliquée est axiale (σ_{33}^0). La sixième constante c_{456} est déterminée à partir de la vitesse $V_{\bar{n},3}$ avec \bar{n} désignant la direction du mode transversal se propageant le long de la diagonale [1-10]. Dans ce cas le matériau est soumis à une contrainte Σ^0 ($\Omega = 45^\circ$) dans le plan de base (001), faisant apparaître une déformation ϵ_{12} .

Dans le présent travail les vitesses expérimentales sont obtenues numériquement par application de la théorie de l'acoustoélasticité. Ces vitesses permettent d'établir un système de six équations linéaires, dont les inconnues sont les constantes hyper-élastiques. L'introduction dans ce modèle de calcul d'une erreur relative sur les vitesses dites expérimentales, permet d'estimer l'erreur sur les valeurs des c_{ijk} . L'application de cette méthode aux cas de Al et Si, permet de retrouver les constantes hyper élastiques de ces deux matériaux. Dans d'autres travaux de Gary [6] et Duquennoy[5], on a effectué la mesure des constantes hyper-élastiques à partir des coefficients acoustoélastiques. L'aluminium étudié par le dernier auteur est considéré comme étant un matériau orthorhombique; les résultats obtenus de manière assez laborieuse sont peu différents de l'aluminium cubique obtenus par la méthode ci dessus.

4. Conclusion

Sous l'action de la contrainte statique, appliquée ou résiduelle, le matériau change de symétrie, les constantes élastiques effectives traduisent les caractéristiques de la nouvelle symétrie. L'équation aux valeurs propres de Christoffel fait intervenir les constantes élastiques effectives de la nouvelle anisotropie et les termes directement liés à la contrainte statique. Ces derniers figurant sur la diagonale de la matrice du tenseur de Christoffel ont une contribution nulle si la direction de propagation de l'onde est dans un plan perpendiculaire à la contrainte.

La différence entre les vitesses exactes et approchées montre que la contribution du terme directement lié à la contrainte peut atteindre les 45% pour le Si et les 20% pour l'Al, de ce fait le terme lié à la contrainte statique ne peut être négligé que dans le voisinage des directions perpendiculaires à la contrainte. Ainsi pour chaque direction d'application d'une contrainte statique on peut trouver un plan ou des directions le long des quels les vitesses de phase et de l'énergie ne sont exprimées qu'en fonction des constantes effectives qui traduisent la nouvelle anisotropie du matériau soumis à la contrainte. Dans ces conditions par des mesures expérimentales de vitesses, il est possible de déterminer les constantes effectives du matériau qui s'expriment en fonction des constantes hyper élastiques. Ces dernières qui caractérisent le comportement non linéaire du matériau seront donc accessibles.

Figures:

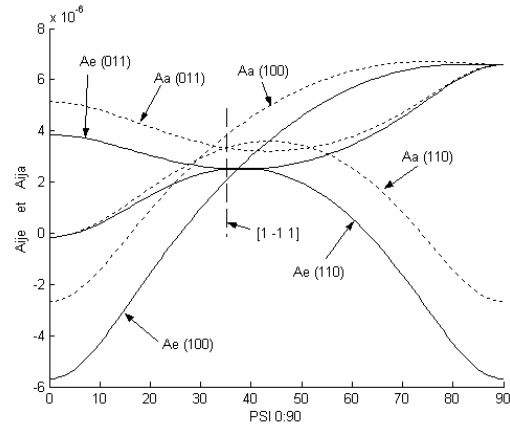


Figure 1 : Coefficient acoustoélastique exacte en trait plein et approchée en trait discontinu, de Si dans les plans de haute symétrie.

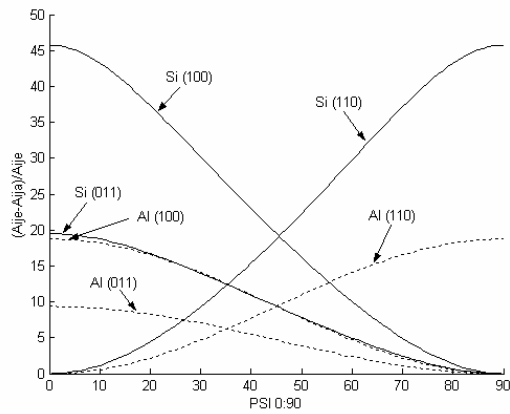


Figure 2 : Différence relative : $\frac{(Aije - Aija)}{Aije}$ du mode longitudinal en pour cent; Si en trait plein et Al en trait discontinu .

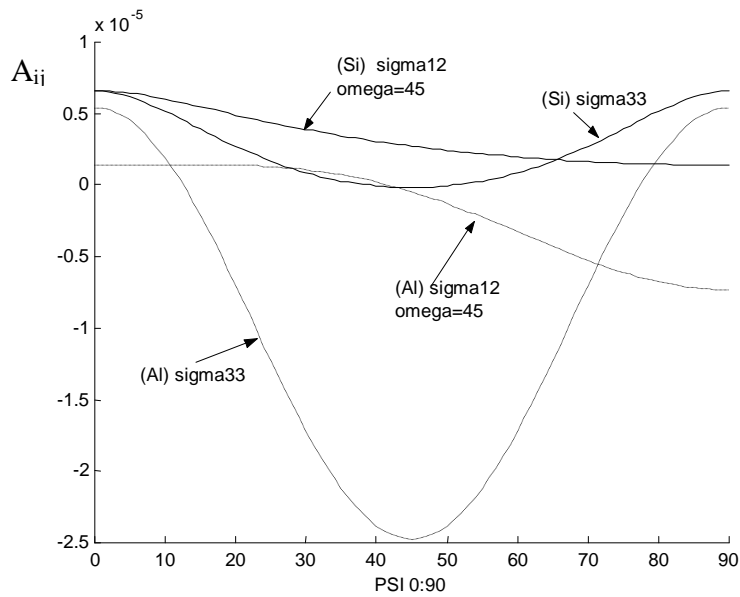


Figure 3 : Coefficient acoustoélastique dans les plans où $V_e=V_a$ [plan (001) pour la contrainte axiale et (110) pour la contrainte de cisaillement]; Si en trait plein et Al en trait discontinu.

Bibliographie

1. Yuossef Abdellahoui, Henri walaszek, Catherine Peyrac, Henri_Paul Lieurade, Mohamed Charfaoui, Récents développements de la mesure des contraintes résiduelles par méthode ultrasonore. Les principales sources d'erreurs, Mec.Ind. 1 .187-200. 2000.
2. N.Ye.Nikitina, L.A.Ostrovsky, An ultrasonic method for measuring stresses in engineering materials, Ultrasonics .35. 605-610.1998.
3. Yih –Hsing Pao and Udo Gamer, Acoustoelastic waves in orthotropic media, J.Acoust Soc.Am.77 (3) .1985.
4. D.M.Egle and D.E. Bray, J.Acoust .Soc.Am.60 (3)741 .1976.
5. Marc Duquennoy, Analyse ultrasonore des contraintes résiduelles dans les alliages d'aluminium par ondes de Rayleigh, Soutenue le 19/12/1997 à l'université de Valenciennes et de Hainaut.
6. Gary G. Leisk and Anil Saigal, The acoustoelastic measurement of elastic constants in alumina/aluminium metal matrix composites, Scripta Metallurgica, Vol. 33, No. 7, pp. 1151-1157, 1995.
7. A.D.Degtyar and S.I.Rokhlin, Absolute stress determination in orthotropic materials from angular dependences of ultrasonic velocities, J.App.Phys. 78(3) 1547-1556 .1995.
8. Daniel Royer Eugène Dieulesaint , Ondes élastiques dans les solides, Masson Paris 1996. Tome 1.
9. A. D. Degtyar and S. I. Rokhlin, Stress effect on boundary conditions and elastic wave propagation through an interface between anisotropic media, J. Acoust. Soc. Am. 104(4), Octobre 1998.
10. H.Ketata, M.Rekik, M.H.Ben Ghazlen, Contrainte résiduelle dans un milieu de symétrie cubique, Acta Acustica Vol. 89 .1-1.2003 .
11. Marc Duquennoy, Mohammadi Ouafouh, Mohamed Ourak, and Wei-Jiang Xu, Influence of natural and initial acoustoelastic coefficients on residual stress evaluation : Theorie and experiment, J.App.Phys. 86(5) 2490-2498 . 1999.

Annexe I: Expression des vitesses en fonction des constantes effectives

$$V_{11} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} ; V_{12} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}} ; V_{13} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (A_{11})$$

$$V_{[110],L} = \sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{66}}{2\rho}} \quad \text{et} \quad V_{33} = \sqrt{\frac{C_{33} - \sigma_{33}^0}{\rho}} \quad (A_{12})$$

$$V_{[n_1, n_2, 0],3} = \sqrt{\frac{C_{55}n_1^2 + 2C_{45}n_1n_2 + C_{44}n_2^2}{\rho}} \quad (A_{13})$$

Annexe II: Expression des constantes effectives en fonction des constantes hyper élastiques

$$C_{11} = f(C_{\alpha\beta}^0, \epsilon_{kl}) + c_{111} \epsilon_{11} + c_{112} (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}). \quad (A_{21})$$

$$C_{12} = f(C_{\alpha\beta}^0, \epsilon_{kl}) + c_{112} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + c_{123} \epsilon_{33} \quad (A_{22})$$

$$C_{13} = f(C_{\alpha\beta}^0, \epsilon_{kl}) + c_{112} (\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) + c_{123} \epsilon_{22} \quad (A_{23})$$

$$C_{22} = f(C_{\alpha\beta}^0, \epsilon_{kl}) + c_{111} \epsilon_{22} + c_{112} (\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) \quad (A_{24})$$

$$C_{23} = f(C_{\alpha\beta}^0, \epsilon_{kl}) + c_{112} (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c_{123} \epsilon_{11} \quad (A_{25})$$

$$C_{33} = f(C_{\alpha\beta}^0, \epsilon_{kl}) + c_{111} \epsilon_{33} + c_{112} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (A_{26})$$

$$C_{44} = f(C_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{kl}) + c_{144} \varepsilon_{11} + c_{155}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (A_{27})$$

$$C_{55} = f(C_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{kl}) + c_{155} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + c_{144} \cdot \varepsilon_{22} \quad (A_{28})$$

$$C_{66} = f(C_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{kl}) + c_{144} \varepsilon_{33} + c_{155} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (A_{29})$$

$$C_{16} = f(C_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{kl}) + c_{155} \cdot \varepsilon_{12} \quad (A_{210})$$

$$C_{26} = f(C_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{kl}) + c_{155} \cdot \varepsilon_{12} \quad (A_{211})$$

$$C_{36} = f(C_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{kl}) + c_{144} \cdot \varepsilon_{12} \quad (A_{212})$$

$$C_{45} = f(C_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{kl}) + c_{456} \cdot \varepsilon_{12} \quad (A_{213})$$

Le terme $f(C_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{kl})$ est une fonction des constantes élastiques du 2^{ème} ordre du matériau et des termes du tenseur déformation (équation 3). Dans le cas de contrainte (σ_{33}^0) : $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = 0$ alors que dans le cas de contrainte $\Sigma^0(\Omega)$: $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} \neq 0$.